Agradecimientos

Este documento es resultado de un trabajo interdisciplinario e interinstitucional, que fue posible gracias a la voluntad decidida de muchas personas y organizaciones que compartieron interrogantes y se comprometieron en la búsqueda de conocimientos acerca de los lineamientos pedagógicos y curriculares que el país necesita y el Ministerio de Educación debe ofrecer. A todos ellos, instituciones y personas, un agradecimiento especial porque con sus aportes están haciendo posible que la educación sea un asunto de interés de toda la sociedad.

A la Dirección General de Investigación y Desarrollo Pedagógico del MEN que junto con sus asesores y equipos de trabajo orientaron, acompañaron y apoyaron el proceso de elaboración, discusión y publicación de este material, un merecido reconocimiento porque su gestión pedagógica y administrativa ha sido definitiva para la consecución de la meta de presentar unos lineamientos a los educadores colombianos.

Volver a Contenido

serie lineamientos curriculares

Mensaje del Ministro

En la antesala del nuevo milenio y en el contexto de la nueva sociedad de conocimiento, la educación se reconoce como la causa principal del progreso y de los avances que conocemos como desarrollo.

Para que esto sea así entre nosotros es urgente animar todos nuestros empeños con una visión nueva del desarrollo y por consiguiente de la educación. Con una visión del desarrollo humano sostenible como visión articuladora y totalizante de las relaciones del hombre con sus semejantes y con su medio, que hace perdurable el progreso para nosotros y para las generaciones futuras, que desarrolla la capacidad humana del trabajo como una potencialidad abierta y coordinada con el flujo de todas las formas de vida como sistema.

Una visión nueva de la educación capaz de hacer realidad las posibilidades intelectuales, espirituales, afectivas, éticas y estéticas de los colombianos, que garantice el progreso de su condición humana, que promueva un nuevo tipo de hombre consciente y capaz de ejercer el derecho al desarrollo justo y equitativo, que interactúe en convivencia con sus semejantes y con el mundo y que participe activamente en la preservación de los recursos. En este contexto, el Ministerio de Educación Nacional entrega a los educadores y a las comunidades educativas del país la serie de documentos titulada "Lineamientos Curriculares", en cumplimiento del artículo 78 de la Ley 115 de 1994.

Los lineamientos constituyen puntos de apoyo y de orientación general frente al postulado de la Ley que nos invita a entender el currículo como "...un conjunto de criterios, planes de estudio, programas, metodologías y procesos que contribuyen a la formación integral y a la construcción de la identidad cultural nacional, regional y local..." (artículo 76).

Los lineamientos que han de generar procesos de reflexión, análisis crítico y ajustes progresivos por parte de los maestros, las comunidades educativas y los investigadores educativos, hacen posible iniciar un cambio profundo hacia nuevas realidades en donde las "utopías" y la imaginación de nuevos modelos de sociedad estimulen entre nosotros un hombre nuevo con una actitud mental nueva, consciente de que no hay realidades por imitar sino futuros por construir, y en el cual las mejores condiciones de vida que se vayan alcanzando exigirán no tanto tener más sino ser más, pues ésta es la verdadera condición del progreso humano.

Jaime Niño Díez
Ministro de Educación Nacional

Volver a Contenido

serie lineamientos curriculares

Sentido pedagógico de los lineamientos

El propósito de estos documentos es compartir algunos conceptos que sustentan los lineamientos curriculares por áreas del conocimiento con el objeto de fomentar su estudio y apropiación.

En el proceso de desarrollo de la Constitución Política y de la Ley General de Educación, surgen interrogantes sobre el sentido y la función de la pedagogía en el siglo XXI, sobre las potencialidades que es posible desarrollar en las personas, en los grupos, en las etnias y en las diversas poblaciones. Ligadas a las anteriores surgen las preguntas sobre qué enseñar y qué aprender en la escuela. Y todos esos cuestionamientos hacen que las reflexiones converjan a los temas de currículo, plan de estudios, evaluación y promoción de los estudiantes. La discusión de estos temas requiere tiempos y espacios intencionalmente generados y mantenidos.

Las respuestas de los docentes y de los consejos académicos pueden tener un énfasis hacia lo local, hacia lo singular del municipio o de la población que atienden. Las respuestas de las secretarías de educación y del Ministerio tienen que combinar la atención a la diversidad con los aportes a la construcción de la identidad nacional. A las autoridades les corresponde velar porque los currículos particulares traten en forma adecuada la tensión entre lo local y lo global; que las comunidades sean competentes para asumir autónomamente sus procesos educativos sin perder de vista que su municipio y su escuela, con todas sus particularidades, están situados en un país y en un mundo interconectado e interdependiente.

Con los lineamientos se pretende atender esa necesidad de orientaciones y criterios nacionales sobre los currículos, sobre la función de las áreas y sobre nuevos enfoques para comprenderlas y enseñarlas.

El papel que cumplen las áreas y las disciplinas en los currículos de la educación básica y media, varía según las épocas y las culturas. A los educadores especialistas corresponde elaborar y asumir los programas curriculares como transitorios, como hipótesis de trabajo que evolucionan a medida que la práctica señala aspectos que se deben modificar, resignificar, suprimir o incluir.

También cambian los procedimientos que el Ministerio de Educación emplea para orientar el desarrollo pedagógico del país. Abandona el rol de diseñador de un currículo nacional para asumir el de orientador y facilitador de ambientes de participación en los cuales las comunidades educativas despliegan su creatividad y ejercen la autonomía como condición necesaria para que haya un compromiso personal e institucional con lo que se hace y se vive en las aulas.

Los lineamientos buscan fomentar el estudio de la fundamentación pedagógica de las disciplinas, el intercambio de experiencias en el contexto de los Proyectos Educativos Institucionales. Los mejores lineamientos serán aquellos que propicien la creatividad, el trabajo solidario en los microcentros o grupos de estudio, el incremento de la autonomía y fomenten en la escuela la investigación, la innovación y la mejor formación de los colombianos.

Santa Fe de Bogotá, D.C., 7 de junio de 1998

Volver a Contenido

serie lineamientos curriculares

Matemáticas

Presentación

Este documento se presenta a consideración de los docentes de los niveles de la educación básica y media que orientan y desarrollan el área de matemáticas en el país. Pretende ser posibilitador, promotor y orientador de los procesos curriculares que viven las instituciones. No debe asumirse como un texto acabado que agota todos los posibles referentes para elaborar o desarrollar un currículo, sino más bien como una propuesta en permanente proceso de revisión y cualificación que ha de suscitar análisis, discusiones y proyecciones en torno al mejoramiento de la calidad de la educación matemática.

También es deseable que en las facultades de educación y en las normales sea objeto de estudio y provocador de debates y grupos de estudio que favorezcan la formación de educadores matemáticos.

El presente trabajo es el resultado de un proceso de reflexión, discusión y consenso convocado y coordinado por el Grupo de Investigación Pedagógica del Ministerio de Educación Nacional con el fin de construir en forma participativa unos lineamientos curriculares para el área de matemáticas.

Como parte de este proceso, en diciembre de 1996 se realizó un Encuentro Nacional con Docentes e Investigadores en Educación Matemática para discutir y poner en común las ideas básicas de los lineamientos y conformar un equipo de apoyo al MEN para la formulación de éstos y para la realización de actividades relacionadas con el impulso de la educación matemática en el país. En el evento participaron un grupo representativo de educadores matemáticos del país, conformado por 72 maestros de primaria y secundaria, tanto del sector oficial como del privado; docentes investigadores; representantes de facultades de educación y asociaciones de educadores; coordinadores de especializaciones en educación matemática de diferentes universidades; profesores de escuelas normales; profesionales de algunos centros experimentales piloto y de algunas secretarías de educación.

Posteriormente se conformó el Grupo de Apoyo al MEN, al que se vincularon educadores de las siguientes instituciones: programa RED de la Universidad Nacional de Colombia, Gimnasio Moderno, Asociación Anillo de Matemáticas, Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia, Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle, Facultad de Educación de la Universidad Distrital “Francisco José de Caldas”, Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Grupo de Epistemología de las Ciencias Naturales y de las Matemáticas de la Universidad Javeriana, Facultad de Educación de la Universidad del Tolima, Facultad de Ciencias de la Educación - Programa Matemáticas y Física de la Universidad de la Amazonia, Colegio Champagnat, Grupo de Desarrollo Educativo de la Secretaría de Educación de Antioquia, Instituto Pedagógico Nacional, Especialización en Educación Matemática de la Universidad de Pamplona, Facultad de Educación de la Universidad Externado de Colombia y Facultad de Educación de la Universidad Libre.

Con este Grupo de Apoyo se llevaron a cabo dos seminarios en 1997 para puntualizar y profundizar sobre los puntos a desarrollar en los lineamientos, y finalmente se nombró un comité de redacción que se reunió periódicamente y del cual surge esta primera propuesta para ser examinada a la luz de las experiencias particulares que caracterizan el PEI de cada institución.

La etapa de construcción de esta primera propuesta de lineamientos para el área de matemáticas concluyó con una reunión de educadores, realizada en junio de 1998, quienes aportaron elementos para su revisión, que en la medida de lo posible se tuvieron en cuenta para esta versión.

El documento presenta en primer lugar algunos antecedentes que motivaron la elaboración de estos lineamientos, unos relacionados con el desarrollo del área en el país y otros de política actual.

En segundo lugar se proponen unos referentes curriculares para orientar a las instituciones educativas en el diseño y desarrollo del currículo dentro del respectivo PEI. Estos referentes tienen que ver con la reflexión sobre la naturaleza de las matemáticas y sus implicaciones pedagógicas, sobre una nueva visión del conocimiento matemático escolar, sobre distintas posibilidades de organizar el currículo y sobre la evaluación.

Como una estrategia de implementación de las ideas discutidas en el documento se presentan en la tercera y última sección algunas reflexiones sobre la formación en educación matemática de los docentes.

Agradecemos a todos los educadores matemáticos e instituciones que contribuyeron con sus reflexiones al proceso de discusión que llevó a esta propuesta, pero muy especialmente al Comité de Redacción, grupo que desde el principio acompañó al Ministerio de Educación en la coordinación de todo el proceso.

Nuestro reconocimiento a los doctores Carlo Federici C. y Carlos E. Vasco U. quienes con su visión prospectiva han venido mostrando rutas para el avance de la educación matemática en el país.

A la doctora Martha Vargas de Avella, nuestra gratitud por el entusiasmo, interés y apoyo que le brindó al grupo durante el proceso de iniciación, concertación y desarrollo de este trabajo.

Consideramos que este documento abre el debate a nivel nacional y es de esperar que a partir de su estudio se generen sugerencias y aportes que permitan ir acercándonos cada vez más a una propuesta que responda a las condiciones, aspiraciones, necesidades e intereses de los educadores matemáticos, de los educandos y de nuestra realidad.

Indudablemente, el docente jugará un papel determinante en la validación final de estos lineamientos y sus percepciones y experiencias sistematizadas serán de gran valor para el enriquecimiento de futuras publicaciones y orientaciones para el área.

1. Antecedentes

Durante las décadas de los años cuarenta y cincuenta se había desarrollado una ingente labor de sistematización de las matemáticas a través del lenguaje de la teoría de conjuntos y de la lógica matemática, liderada por el grupo que escribía con el seudónimo de "Nicolás Bourbaki". Esta reestructuración bourbakista de las matemáticas sedujo a la comunidad matemática por su elegancia arquitectónica y por la unificación del lenguaje, hasta tal punto que se pensó abolir el plural "matemáticas" para hablar de una sola "matemática".

El lanzamiento del Sputnik por los soviéticos impulsó a los norteamericanos a iniciar una renovación de la enseñanza de las ciencias y de las matemáticas en la educación secundaria y media, para preparar los futuros científicos que alcanzaran a los soviéticos en la carrera espacial. Numerosos programas experimentales de matemáticas fueron desarrollados por grupos de expertos, quienes creyeron encontrar en la teoría de conjuntos y la lógica matemática los medios más aptos para lograr que todos los niños tuvieran fácil acceso a las matemáticas más avanzadas [1].

Surge así la llamada "nueva matemática" o "matemática moderna" o "new math" en los años 60 y 70, que produjo una transformación de la enseñanza y cuyas principales características fueron: énfasis en las estructuras abstractas; profundización en el rigor lógico, lo cual condujo al énfasis en la fundamentación a través de la teoría de conjuntos y en el cultivo del álgebra, donde el rigor se alcanza fácilmente; detrimento de la geometría elemental y el pensamiento espacial; ausencia de actividades y problemas interesantes y su sustitución por ejercicios muy cercanos a la mera tautología y reconocimiento de nombres.

Para atender a esta reforma, en nuestro país se promulgó el decreto 1710 de 1963, que establecía los programas para primaria, diseñados con el estilo de objetivos generales y objetivos específicos conductuales, propios de la época, y en ese mismo estilo se diseñó el decreto 080 de 1974 para los programas de secundaria.

Muy pronto, a comienzos de la misma "matemática moderna" y en los años 70, se empezó a percibir que muchos de los cambios introducidos no habían resultado muy acertados, que los problemas e inconvenientes surgidos superaban las supuestas ventajas que se esperaba conseguir como el rigor en la fundamentación, la comprensión de las estructuras matemáticas, la modernidad y el acercamiento a la matemática contemporánea.

Se inició entonces, en los años 70 y 80, el debate entre los partidarios de esta "nueva matemática" y los que querían que se volviera a lo básico: las cuatro operaciones con enteros, fraccionarios y decimales. Este movimiento Back to Basics tuvo muchos defensores entre matemáticos calificados, maestros y padres de familia, quienes decían que los niños aprendían muchas palabras raras, aprendían operaciones entre conjuntos y símbolos lógicos y no podían hacer operaciones entre naturales ni fraccionarios. En nuestro país se decía que a los niños les estaba dando "conjuntivitis".

Tradicionalmente, las reformas que ocurrían en nuestro país no iban más allá de algunas adiciones, algunas supresiones y de la reorganización de los contenidos.

En 1975, la administración López Michelsen inició una reforma escolar amplia, que se llamó Mejoramiento Cualitativo de la Educación, en la cual se propuso la renovación de programas, la capacitación del magisterio y la disponibilidad de medios educativos, como estrategias para mejorar la calidad de la educación. Para llevar a cabo tal propósito, en 1976 se creó en el Ministerio de Educación la Dirección General de Capacitación y Perfeccionamiento Docente, Currículo y Medios Educativos, la cual diseñó y experimentó en algunas escuelas del país un currículo para los grados primero a tercero.

En 1978, se nombró como asesor del Ministerio para la reestructuración de las matemáticas escolares al doctor Carlos Eduardo Vasco Uribe, por comisión de la Universidad Nacional, y con un grupo de profesionales de esa dirección se comenzó a revisar los programas de matemáticas de primero a tercero, y se consideró esencial la elaboración de un marco teórico global que permitiera precisar los criterios con los cuales se deberían hacer la revisión y el diseño de los programas de los nueve grados de la educación básica.

El enfoque propuesto para los programas de matemáticas de la Renovación Curricular pretendió superar las limitaciones de las dos escuelas mencionadas, seleccionando los aspectos positivos que tenía el enfoque conceptual de la nueva matemática sin caer en enseñar lógica y conjuntos, y ofrecer esos criterios teóricos que permitieran la toma de decisiones.

Para la preparación de sus clases, el marco teórico del programa de matemáticas propuso al maestro enfocar los diversos aspectos de las matemáticas como sistemas y no como conjuntos. Esto se llamó "enfoque de sistemas" [2] y propuso acercarse a las distintas regiones de las matemáticas, los números, la geometría, las medidas, los datos estadísticos, la misma lógica y los conjuntos desde una perspectiva sistémica que los comprendiera como totalidades estructuradas, con sus elementos, sus operaciones y sus relaciones.

El enfoque del programa también propuso al docente distinguir cuidadosamente entre el sistema simbólico (que se escribe, se pinta o se habla), el sistema conceptual (que se piensa, se construye, se elabora mentalmente) y los sistemas concretos (de donde los niños pueden sacar los conceptos esperados).

> La renovación curricular propuso acercarse a las distintas regiones de las matemáticas, los números, la geometría, las medidas, los datos estadísticos, la misma lógica y los conjuntos desde una perspectiva sistémica que los comprendiera como totalidades estructuradas, con sus elementos, sus operaciones y sus relaciones.

La sugerencia pedagógica del programa es la de explorar los sistemas concretos que ya utilizan los niños, para partir de ellos hacia la construcción de los sistemas conceptuales respectivos; cuando ya se ha iniciado la construcción de éste, el mismo alumno puede desarrollar sistemas simbólicos apropiados, aprender los usuales y aún traducir de unos sistemas simbólicos a otros.

La Renovación Curricular, como proyecto de largo aliento, con casi veinte años de diseño, experimentación, revisión y de aplicación gradual, ha sido uno de los programas a largo plazo del Ministerio de Educación. Este programa marcó una etapa de concreción de una propuesta curricular fruto de una búsqueda que se entregó al país no para copiarla y seguirla al pie de la letra, sino para ver formas de trabajar unidades didácticas de manera activa, que permitieran avanzar en la conceptualización y la fundamentación de las propuestas pedagógicas.

Un análisis crítico de la Renovación Curricular de Matemáticas debe detenerse, entre otros aspectos, en los aportes al incremento de la capacidad de conceptualizar. Los programas extensos con actividades y sugerencias metodológicas tienen el propósito de satisfacer necesidades de actualización sentidas por los docentes.

El análisis de la Ley General de Educación, Ley 115 de 1994, permite identificar los desarrollos pedagógicos obtenidos en los decenios anteriores, que fueron asumidos en las políticas educativas actuales. En particular, el Enfoque de

Sistemas que se adoptó para el área de matemáticas en la Renovación Curricular se retoma en los artículos 21 y 22 de la mencionada Ley.

Los Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas aquí propuestos toman como punto de partida los avances logrados en la Renovación Curricular, uno de los cuales es la socialización de un diálogo acerca del Enfoque de Sistemas y el papel que juega su conocimiento en la didáctica.

El enfoque de estos lineamientos está orientado a la conceptualización por parte de los estudiantes, a la comprensión de sus posibilidades y al desarrollo de competencias que les permitan afrontar los retos actuales como son la complejidad de la vida y del trabajo, el tratamiento de conflictos, el manejo de la incertidumbre y el tratamiento de la cultura para conseguir una vida sana.

El trabajo que implica desarrollar la Ley General de Educación incluye la conceptualización de los logros curriculares y de sus indicadores también en el área de matemáticas. Todos los esfuerzos individuales y grupales que puedan hacerse en este sentido deben ser socializados y discutidos ampliamente con el propósito de aprovecharlos en toda su riqueza de modo que se vayan consolidando procedimientos que faciliten un trabajo sistemático, serio y útil para los docentes y estudiantes.

Ubicados en un contexto de descentralización educativa y ejercicio de la autonomía escolar se puede inferir la diferencia entre el currículo nacional que ofrecía el MEN hasta cuatro años y los lineamientos actuales. Los programas por áreas señalaban las temáticas, las metodologías recomendadas y las evaluaciones más viables. Ahora los lineamientos buscan incrementar la formación de quienes hacen currículo y de quienes asesoran a las instituciones educativas para que lleven a cabo sus procesos curriculares dentro del Proyecto Educativo Institucional. Deben servir de orientación pero no reemplazan a los docentes en las decisiones que les corresponde tomar en asuntos como contenidos, metodologías y estrategias para la participación.

En este sentido, los programas de matemáticas de la Renovación Curricular que no tienen el carácter de Currículo Nacional se constituyen en una propuesta que puede ser consultada por los docentes y utilizada para enriquecer el currículo del PEI.

Otro antecedente que ha abierto nuevas posibilidades para pensar los currículos es el surgimiento de organizaciones nacionales e internacionales cuyo propósito es estudiar las características que debe reunir la educación matemática para que cumpla los diversos propósitos que la sociedad espera de ella. Propósitos que van desde el desarrollo de competencias básicas para realizar ejercicios cotidianos de cuentas, hasta el cultivo de las capacidades cognitivas y metacognitivas que puedan ser empleadas en la educación superior y que hagan progresar la ciencia y la tecnología.

Cada vez tiene más fuerza la convicción de que la orientación de la educación matemática se logra más efectivamente cuando se asume en forma compartida. Prueba de ello son el Comité Interamericano de Educación Matemática, la Comisión Internacional de Educación Matemática y las demás asociaciones y organismos que desde hace treinta o cuarenta años llevan a cabo un trabajo continuado para preguntar qué hay que enseñar y aprender en educación matemática tanto en la educación básica como en la media y superior.

Internacionalmente ha habido también interés por la evaluación de los resultados de la educación matemática en los primeros niveles de la educación formal. Por ejemplo, los tres estudios internacionales que han evaluado los logros de los estudiantes: el primer estudio internacional de matemáticas (First International Mathematics Study, FIMS), el segundo estudio internacional de matemáticas (Second International Mathematics Study, SIMS) y el tercer estudio internacional de matemáticas y ciencias (Third International Mathematics and Sciences Study, TIMSS). Colombia participó en este último junto con otros cuarenta países, teniendo como marco los programas de la Renovación Curricular.

A propósito de este punto los documentos del TIMSS (Habilidades en ciencias y matemáticas: Una alternativa para desarrollar la creatividad - Ministerio de Educación Nacional, 1997) publican informaciones como la siguiente:

> El cronograma del TIMSS planteó el análisis curricular que se concluyó en 1994 con un análisis completo y a fondo de las guías curriculares, textos de estudio y opiniones de expertos, que permitan identificar muy bien las características del currículo oficial, o al menos se conozcan bien sus buenas intenciones. En este aspecto la propuesta curricular de Colombia está a la altura de los demás países e intercepta en más de un 75-80% el Currículo Internacional en Ciencias Matemáticas.

Los documentos publicados sobre el TIMSS contienen información valiosa para Colombia en relación con el currículo y con los factores que favorecen o dificultan los logros de los estudiantes.

Se encuentran evidencias de que el currículo propuesto es bien diferente del que se desarrolla efectivamente en el aula y del que es aprendido por los estudiantes.

También contamos con evaluaciones nacionales sobre la calidad de la educación en matemáticas. Desde 1991 el Servicio Nacional de Pruebas del ICFES, el Grupo de Matemáticas del Ministerio de Educación Nacional y varias universidades y docentes han adelantado una investigación sobre la calidad de la educación en los grados 3°, 5°, 7°, y 9°:

Esas informaciones están contenidas en diversas publicaciones que el Ministerio de Educación Nacional ha entregado al país para que sean estudiadas y debatidas ampliamente de modo que constituyan una fuente de criterios para la toma de decisiones nacionales, regionales y locales. Las publicaciones mencionadas son las correspondientes a Saber del Sistema Nacional de Evaluación de la Educación, SNE y las del TIMSS ya mencionado. Ellas constituyen un material de consulta necesaria para todos cuantos intervienen en la educación matemática porque presentan estudios muy completos acerca de lo que los alumnos están aprendiendo con más efectividad, sobre dificultades y tendencias erróneas, así como sobre niveles de logro que alcanzan y factores asociados a la enseñanza y el aprendizaje.

Las publicaciones mencionadas incluyen, además, información amplia sobre las preguntas hechas en las evaluaciones de estudiantes y los análisis llevadas a cabo. Tal vez nunca había contado el país con una información similar en la cual hay estudios nacionales que simultáneamente con estudios internacionales pueden orientar el currículo de matemáticas de la educación formal. Al respecto conviene señalar que el TIMSS considera el currículo como una variable central y lo estudia en tres niveles: el propuesto, el desarrollado y el logrado.

Al Ministerio de Educación Nacional en todas sus instancias, a las secretarías de educación, a las universidades, centros de investigación, instituciones educativas, docentes, consejos académicos corresponde comprender la importancia que tienen las evaluaciones de la educación matemática llevadas a cabo en Colombia, y tomar las decisiones que sean necesarias y pertinentes para aprender de la experiencia y orientar el currículo hoy.

Tal vez nunca había contado el país con una información similar en la cual hay estudios nacionales que simultáneamente con estudios internacionales pueden orientar el currículo de matemáticas de la educación formal.

Finalmente, desde hace unos veinte años se han venido creando y desarrollando sociedades de matemáticas, una Sociedad Colombiana de Matemáticas y diversas sociedades departamentales que entre sus propósitos incluyen el de ofrecer espacios de estudio y debate de diversos aspectos curriculares como contenidos, metodologías, evaluación y formación de educadores.

Son muchos los educadores colombianos que han ampliado su formación y enriquecido su visión de la educación acerca de las ciencias matemáticas. En ellos tiene el país un grupo de apoyo importante para lograr la transformación del currículo de esta área del conocimiento.

---

1. Carlos E. Vasco, "El enfoque de sistemas en el nuevo programa de Matemáticas", en: MEN: Un nuevo enfoque para la didáctica de las matemáticas, vol. II, serie Pedagogía y Currículo, 1987, pág. 10.

2. Para ampliar la visión del Enfoque de Sistemas puede consultarse el "Marco general de la propuesta de renovación curricular de matemáticas" incluida en el Programa de 9° grado, y diversos artículos escritos por el doctor Carlos Vasco, que fueron compilados en "Un nuevo enfoque para la didáctica de las matemáticas", vol. I y II, de la serie Pedagogía y Currículo del MEN.

2. Referentes Curriculares

A la hora de abordar el currículo de matemáticas en los Proyectos Educativos Institucionales, se hace necesario reflexionar sobre preguntas como las siguientes:

¿Qué son las matemáticas?

¿En qué consiste la actividad matemática en la escuela?

¿Para qué y cómo se enseñan las matemáticas?

¿Qué relación se establece entre las matemáticas y la cultura?

¿Cómo se puede organizar el currículo de matemáticas?

¿Qué énfasis es necesario hacer?

¿Qué principios, estrategias y criterios orientarían la evaluación del desempeño matemático de los alumnos?

El trabajo y la discusión sobre estas respuestas pueden dar referentes para tomar decisiones relacionados con la elaboración, el desarrollo y la evaluación del currículo.

En las siguientes secciones intentamos dar algunas pautas para propiciar y enriquecer esa reflexión entre los docentes.

2. Referentes Curriculares

2.1 Una reflexión sobre diferentes concepciones acerca de la naturaleza de las matemáticas y sus implicaciones didácticas

Antes de abordar esta reflexión nos parece pertinente hacer referencia a una exploración realizada con cerca de 100 docentes de diferentes niveles de la enseñanza básica y con algunos estudiantes del programa de Especialización en docencia de las matemáticas, acerca de sus concepciones sobre la naturaleza de las matemáticas y la naturaleza del conocimiento matemático escolar con el objeto de contrastar dichas concepciones con las planteadas en literatura especializada, así como con las percibidas por nosotros a lo largo de nuestra experiencia.

Con respecto a las matemáticas, algunos docentes encuestados las asumen como un cuerpo estático y unificado de conocimientos, otros las conciben como un conjunto de estructuras interconectadas, otros simplemente como un conjunto de reglas, hechos y herramientas; hay quienes las describen como la ciencia de los números y las demostraciones.

En lo que al hacer matemático se refiere, algunos profesores lo asocian con la actividad de solucionar problemas, otros con el ordenar saberes matemáticos establecidos y otros con el construir nuevos saberes a partir de los ya conocidos, siguiendo reglas de la lógica.

El conocimiento matemático escolar es considerado por algunos como el conocimiento cotidiano que tiene que ver con los números y las operaciones, y por otros, como el conocimiento matemático elemental que resulta de abordar superficialmente algunos elementos mínimos de la matemática disciplinar. En general consideran que las matemáticas en la escuela tienen un papel esencialmente instrumental, que por una parte se refleja en el desarrollo de habilidades y destrezas para resolver problemas de la vida práctica, para usar ágilmente el lenguaje simbólico, los procedimientos y algoritmos y, por otra, en el desarrollo del pensamiento lógico-formal.

Trataremos de explorar el origen de algunas de las concepciones anteriormente descritas, a la luz de posturas teóricas de filósofos, de matemáticos y de educadores matemáticos, desde diferentes ámbitos, con el propósito fundamental de analizar las implicaciones didácticas de dichas concepciones.

¿De dónde provienen las concepciones acerca del conocimiento matemático escolar?

La historia da cuenta de siglos y siglos de diversas posiciones y discusiones sobre el origen y la naturaleza de las matemáticas; es decir, sobre si las matemáticas existen fuera de la mente humana o si son una creación suya; si son exactas e infalibles o si son falibles, corregibles, evolutivas y provistas de significado como las demás ciencias.

a) El Platonismo

Éste considera las matemáticas como un sistema de verdades que han existido desde siempre e independientemente del hombre. La tarea del matemático es descubrir esas verdades matemáticas, ya que en cierto sentido está "sometido" a ellas y las tiene que obedecer. Por ejemplo, si construimos un triángulo de catetos c, d y de hipotenusa h, entonces irremediablemente encontraremos que: $h^2 = c^2 + d^2$.

El Platonismo reconoce que las figuras geométricas, las operaciones y las relaciones aritméticas nos resultan en alguna forma misteriosas; que tienen propiedades que descubrimos sólo a costa de un gran esfuerzo; que tienen otras que nos esforzamos por descubrir pero no lo conseguimos, y que existen otras que ni siquiera sospechamos, ya que las matemáticas trascienden la mente humana, y existen fuera de ella como una "realidad ideal" independiente de nuestra actividad creadora y de nuestros conocimientos previos.

¿Cuántos de nuestros profesores y alumnos pertenecerán, sin proponérselo, y más aún sin saberlo, al Platonismo? ¿Cuáles implicaciones favorables y cuáles desfavorables se pueden originar en esa situación? ¿Cuál sería, para la corriente del Platonismo, un concepto de pedagogía activa coherente con su posición filosófica?

b) El Logicismo

Esta corriente de pensamiento considera que las matemáticas son una rama de la Lógica, con vida propia, pero con el mismo origen y método, y que son parte de una disciplina universal que regiría todas las formas de argumentación. Propone definir los conceptos matemáticos mediante términos lógicos, y reducir los teoremas de las matemáticas, los teoremas de la Lógica, mediante el empleo de deducciones lógicas.

Prueba de lo anterior es la afirmación de que "La Lógica matemática es una ciencia que es anterior a las demás, y que contiene las ideas y los principios en que se basan todas las ciencias" (DOU, 1970: 59), atribuida a Kurt Gödel (1906) y que coincide, en gran medida, con el pensamiento aristotélico y con el de la escolástica medieval. Claro que hay que tener en cuenta que para los antiguos, la Lógica era más un arte que una ciencia: un arte que cultiva la manera de operar válidamente con conceptos y proposiciones; un juego de preguntas y respuestas; un pasatiempo intelectual que se realizaba en la Academia de Platón y en el Liceo de Aristóteles, en el que los contendientes se enfrentaban entre sí mientras el público aplaudía los ataques y las respuestas.

Esta corriente reconoce la existencia de dos Lógicas que se excluyen mutuamente: la deductiva y la inductiva. La deductiva busca la coherencia de las ideas entre sí; parte de premisas generales para llegar a conclusiones específicas. La inductiva procura la coherencia de las ideas con el mundo real; parte de observaciones específicas para llegar a conclusiones generales, siempre provisorias, que va refinando a través de experiencias y contrastaciones empíricas.

Una de las tareas fundamentales del Logicismo es la "logificación" de las matemáticas, es decir, la reducción de los conceptos matemáticos a los conceptos lógicos. El primer paso fue la reducción o logificación del concepto de número. En este campo se destaca el trabajo de Gottlob Frege (1848-1925) quien afirma "...espero haber hecho probable que las leyes aritméticas son juicios analíticos y por tanto a priori. Según ello, la aritmética no sería más que una lógica más desarrollada; todo teorema aritmético sería una ley lógica aunque derivada. Las aplicaciones de la aritmética a la explicación de los fenómenos naturales serían un tratamiento lógico de los hechos observados; computación sería inferencia. Las leyes numéricas no necesitan, como pretende Baumann, una confirmación práctica para que sean aplicables al mundo externo, puesto que en el mundo externo, la totalidad del espacio y su contenido, no hay conceptos, ni propiedades de conceptos, ni números. Por tanto las leyes numéricas no son en realidad aplicables al mundo externo: no son leyes de la naturaleza. Son, sin embargo, aplicables a los juicios, los cuales son en verdad cosas de la naturaleza: son leyes de las leyes de la naturaleza..." (DOU, 1970: 62-63).

Frege hizo grandes aportes a lo que hoy conocemos como Lógica matemática: cálculo proposicional, reglas para el empleo de los cuantificadores universales y existenciales, y el análisis lógico del método de prueba de inducción matemática.

El Logicismo, lo mismo que otras teorías sobre fundamentos de las matemáticas, tiene que afrontar el delicado reto de evitar caer en las paradojas, sin que haya conseguido una solución plenamente satisfactoria, después de un siglo de discusiones y propuestas alternativas. Entre los problemas que reaparecen en la discusión sobre filosofía de las matemáticas, está el de la logificación o aritmetización del continuo de los números reales: ¿Se puede entender lo continuo (los reales) a partir de lo discreto (aritmética de los naturales)?

¿Cuál es, como docentes o como estudiantes, nuestra posición frente a esta forma de concebir las matemáticas y la Lógica?

c) El Formalismo

Esta corriente reconoce que las matemáticas son una creación de la mente humana y considera que consisten solamente en axiomas, definiciones y teoremas como expresiones formales que se ensamblan a partir de símbolos, que son manipulados o combinados de acuerdo con ciertas reglas o convenios preestablecidos. Para el formalista las matemáticas comienzan con la inscripción de símbolos en el papel; la verdad de la matemática formalista radica en la mente humana pero no en las construcciones que ella realiza internamente, sino en la coherencia con las reglas del juego simbólico respectivo. En la actividad matemática, una vez fijados los términos iniciales y sus relaciones básicas, ya no se admite nada impreciso u oscuro; todo tiene que ser perfecto y bien definido. Las demostraciones tienen que ser rigurosas, basadas únicamente en las reglas del juego deductivo respectivo e independiente de las imágenes que asociemos con los términos y las relaciones.

¿Qué tanto énfasis formalista hay en la educación matemática en nuestros establecimientos educativos? ¿Qué actitud produce este tratamiento formalista en la mayoría de nuestros alumnos? ¿Qué piensan ellos sobre esto? ¿Qué clase de implicaciones tiene este hecho en el desarrollo integral y pleno de los estudiantes?

d) El Intuicionismo

Considera las matemáticas como el fruto de la elaboración que hace la mente a partir de lo que percibe a través de los sentidos y también como el estudio de esas construcciones mentales cuyo origen o comienzo puede identificarse con la construcción de los números naturales.

Puede decirse que toda la matemática griega, y en particular la aritmética, es espontáneamente intuicionista, y que la manera como Kant concebía la aritmética y la geometría es fundamentalmente intuicionista, por más que el Intuicionismo como escuela de filosofía de las matemáticas se haya conformado sólo a comienzos del siglo XX.

El principio básico del Intuicionismo es que las matemáticas se pueden construir; que han de partir de lo intuitivamente dado, de lo finito, y que sólo existe lo que en ellas haya sido construido mentalmente con ayuda de la intuición.

El fundador del Intuicionismo moderno es Luitzen Brouwer (1881-1968), quien considera que en matemáticas la idea de existencia es sinónimo de constructibilidad y que la idea de verdad es sinónimo de demostrabilidad. Según lo anterior, decir de un enunciado matemático que es verdadero equivale a afirmar que tenemos una prueba constructiva de él. De modo similar, afirmar de un enunciado matemático que es falso significa que si suponemos que el enunciado es verdadero tenemos una prueba constructiva de que caemos en una contradicción como que el uno es el mismo dos.

Conviene aclarar que el Intuicionismo no se ocupa de estudiar ni de descubrir las formas como se realizan en la mente las construcciones y las intuiciones matemáticas, sino que supone que cada persona puede hacerse consciente de esos fenómenos. La atención a las formas como ellos ocurren es un rasgo característico de otra corriente de los fundamentos de las matemáticas: el Constructivismo, al cual nos referimos enseguida.

e) El Constructivismo

Está muy relacionado con el Intuicionismo pues también considera que las matemáticas son una creación de la mente humana, y que únicamente tienen existencia real aquellos objetos matemáticos que pueden ser construidos por procedimientos finitos a partir de objetos primitivos. Con las ideas constructivistas van muy bien algunos planteamientos de Georg Cantor (1845-1918): “La esencia de las matemáticas es su libertad. Libertad para construir, libertad para hacer hipótesis” (Davis, Hersh,1988: 290).

El Constructivismo matemático es muy coherente con la Pedagogía Activa y se apoya en la Psicología Genética; se interesa por las condiciones en las cuales la mente realiza la construcción de los conceptos matemáticos, por la forma como los organiza en estructuras y por la aplicación que les da; todo ello tiene consecuencias inmediatas en el papel que juega el estudiante en la generación y desarrollo de sus conocimientos. No basta con que el maestro haya hecho las construcciones mentales; cada estudiante necesita a su vez realizarlas; en eso nada ni nadie lo puede reemplazar.

¿En qué medida el trabajo en clase de matemáticas tiene un enfoque constructivista? ¿Qué implicaciones se derivan de ese enfoque para el desarrollo integral de los estudiantes?

¿Qué tanta compatibilidad o incompatibilidad hay entre las corrientes mencionadas? ¿Qué relación tienen con el currículo de matemáticas?

Tal vez resulte provechoso para docentes y estudiantes hacer una reflexión en torno a este tema de la filosofía de las matemáticas, y en torno a preguntas como las formuladas. Podría optarse por la realización de mesas redondas con todo el curso o varios cursos. Una reunión previa de los profesores de matemáticas, y una serie de lecturas y discusiones entre colegas, pueden ayudar a que esas mesas redondas sean más fructíferas, más animadas y más productivas para el cambio de actitud de profesores y alumnos hacia las matemáticas (MEN, 1991: 30 -32).

2. Referentes Curriculares

2.2 Elementos que inciden en una reconceptualización de la educación matemática hoy

En la actualidad, el papel de la filosofía continúa siendo, desde luego, dar cuenta de la naturaleza de las matemáticas, pero desde perspectivas mucho más amplias que las planteadas por las escuelas filosóficas mencionadas, perspectivas que tienen en cuenta tanto aspectos externos –la historia, la génesis y la práctica de las matemáticas–, como aspectos internos, el ser (ontología) y el conocer (epistemología).

A continuación presentamos reflexiones sobre la filosofía de las matemáticas y de la educación matemática.

> "La filosofía de la matemática actual ha dejado de preocuparse tan insistentemente como en la primera mitad del siglo sobre los problemas de fundamentación de la matemática, especialmente tras los resultados de Gödel a comienzos de los años 30, para enfocar su atención en el carácter cuasiempírico de la actividad matemática (I. Lakatos), así como en los aspectos relativos a la historicidad e inmersión de las matemáticas en la cultura de la sociedad en la que se origina (R. L. Wilder), considerando la matemática como un subsistema cultural con características en gran parte comunes a otros sistemas semejantes. Tales cambios en lo hondo del entender y del sentir mismo de los matemáticos sobre su propio quehacer vienen provocando, de forma más o menos consciente, fluctuaciones importantes en las consideraciones sobre lo que la enseñanza matemática debe ser" (Miguel de Guzmán,1993).

Paul Ernest ha propuesto una reconceptualización del papel de la filosofía de las matemáticas, que tenga en cuenta la naturaleza, justificación y génesis tanto del conocimiento matemático como de los objetos de las matemáticas, las aplicaciones de éstas en la ciencia y en la tecnología, y el hacer matemático a lo largo de la historia. Este planteamiento ha llevado a considerar que el conocimiento matemático está conectado con la vida social de los hombres, que se utiliza para tomar determinadas decisiones que afectan a la colectividad y que sirve como argumento de justificación.

Una primera aproximación desde esta perspectiva a lo que sería la naturaleza esencial de las matemáticas podría plantear entonces que ésta tiene que ver con las abstracciones, las demostraciones y las aplicaciones. Por ejemplo, cuando operamos con números, sin preocuparnos por relacionarlos con objetos concretos, o cuando abordamos el concepto de figura geométrica, dejando de lado todas las propiedades del objeto, excepto su forma espacial y sus dimensiones, estamos reconociendo el carácter abstracto de las matemáticas. Es de anotar que a diferencia de las abstracciones en otras disciplinas, los niveles de abstracción en las matemáticas son crecientes llegando unos a constituirse en fuentes de otros, de tal manera que las matemáticas avanzan en el campo de los conceptos abstractos y de sus interrelaciones.

Para enriquecer los debates, desde la perspectiva actual, presentamos algunas ideas del didácta francés Guy Brousseau relacionadas con el saber matemático y la transposición didáctica [3], el trabajo del matemático, el trabajo del profesor, y el trabajo del alumno, todas ellas objeto de estudios de la didáctica de las matemáticas y por consiguiente en la Educación Matemática.

- **El saber matemático y la transposición didáctica**

El saber constituido se presenta bajo formas diversas, por ejemplo la forma de preguntas y respuestas. La presentación axiomática es una presentación clásica de las matemáticas.

Además de las virtudes científicas que se le conocen, parece estar maravillosamente adaptada para la enseñanza. Permite definir en cada instante los objetos que se estudian con ayuda de las nociones introducidas precedentemente y, así, organizar la adquisición de nuevos conocimientos con el auxilio de adquisiciones anteriores. Promete pues al estudiante y a su profesor un medio para ordenar su actividad y acumular en un mínimo de tiempo un máximo de "conocimiento" bastante cercano al "conocimiento erudito". Evidentemente, debe estar complementada con ejemplos y problemas cuya solución exige poner en acción esos conocimientos.

Pero esta presentación elimina completamente la historia de esos conocimientos, es decir la sucesión de dificultades y problemas que han provocado la aparición de los conceptos fundamentales, su uso para plantear nuevos problemas, la intrusión de técnicas y problemas nacidos de los progresos de otros sectores, el rechazo de ciertos puntos de vista que llevan a malentendidos, y las innumerables discusiones al respecto. Enmascara el "verdadero" funcionamiento de la ciencia, imposible de comunicar y describir fielmente desde el exterior, para poner en su lugar una génesis ficticia. Para facilitar la enseñanza, aísla ciertas nociones y propiedades del tejido de actividades en donde han tomado su origen, su sentido, su motivación y su empleo. Ella los transpone en el contexto escolar. Los epistemólogos llaman transposición didáctica a esta operación. Ella tiene su utilidad, sus inconvenientes y su papel, aun para la construcción de la ciencia. Es a la vez inevitable, necesaria y en un sentido deplorable. Debe mantenérsele vigilada.

- **El trabajo del matemático**

Antes de comunicar lo que piensa haber hallado, un investigador debe primero determinarlo: no es fácil distinguir en el laberinto de las reflexiones, aquellas que son susceptibles de convertirse en un saber nuevo e interesante para los demás; las demostraciones obtenidas son raramente las de las conjeturas consideradas; debe emprenderse todo un reordenamiento de los conocimientos vecinos, anteriores o nuevos.

- Es preciso también suprimir todas las reflexiones inútiles, la huella de los errores cometidos y de los procederes erráticos. Hay que ocultar las razones que han llevado en esta dirección y las condiciones personales que han conducido al éxito, problematizar hábilmente las notas, aun aquellas un poco banales, pero evitar las trivialidades... Hay también que buscar la teoría más general en la que los resultados siguen siendo valederos... De esta manera, el productor del conocimiento despersonaliza, descontextualiza y destemporaliza lo más posible sus resultados.

- Ese trabajo es indispensable para que el lector pueda tomar conciencia de esos resultados y convencerse de su validez sin seguir el mismo camino para su descubrimiento, beneficiándose de las posibilidades que se le ofrecen para su utilización.

- Entonces otros lectores transforman a su vez esos resultados, los reformulan, los aplican, los generalizan, si son esas sus necesidades. Si llega el caso los destruyen, ya sea identificándolos con conocimientos ya existentes, ya sea incluyéndolos en resultados más importantes, o simplemente olvidándolos... y hasta mostrándolos falsos. De esta manera la organización de los conocimientos depende, desde su origen, de las exigencias impuestas a su autor para su comunicación. Ella no cesa de ser a continuación modificada por los mismos motivos, hasta el punto de que su sentido cambia muy profundamente: la transposición didáctica se desarrolla en gran parte en la comunidad científica y se prosigue en los medios cultivados. Esta comunidad funciona sobre la base de las relaciones que sostienen el interés y el compromiso, tanto personales como contextuales de cuestiones matemáticas y la pérdida de este interés hacia la producción de un texto del conocimiento tan objetivo como sea posible.

- **El trabajo del alumno**

El trabajo intelectual del alumno debe por momentos ser comparable a esta actividad científica. Saber matemáticas no es solamente aprender definiciones y teoremas, para reconocer la ocasión de utilizarlas y aplicarlas; sabemos bien que hacer matemáticas implica que uno se ocupe de problemas, pero a veces se olvida que resolver un problema no es más que parte del trabajo; encontrar buenas preguntas es tan importante como encontrarles soluciones. Una buena reproducción por parte del alumno de una actividad científica exigiría que él actúe, formule, pruebe, construya modelos, lenguajes, conceptos, teorías, que los intercambie con otros, que reconozca las que están conformes con la cultura, que tome las que le son útiles, etcétera.

Para hacer posible semejante actividad, el profesor debe imaginar y proponer a los alumnos situaciones que puedan vivir y en las que los conocimientos van a aparecer como la solución óptima y descubrible en los problemas planteados.

- **El trabajo del profesor**

El trabajo del profesor es en cierta medida inverso al trabajo del investigador, él debe hacer una recontextualización y una repersonalización de los conocimientos. Ellos van a convertirse en el conocimiento de un alumno, es decir en una respuesta bastante natural a condiciones relativamente particulares, condiciones indispensables para que tengan un sentido para él. Cada conocimiento debe nacer de la adaptación a una situación específica, pues las probabilidades se crean en un contexto y en unas relaciones con el medio, diferentes de aquellos en donde se inventa o se utiliza la aritmética o el álgebra.

- El profesor debe pues simular en su clase una micro sociedad científica, si quiere que los conocimientos sean medios económicos para plantear buenos problemas y para solucionar debates, si quiere que los lenguajes sean medios de dominar situaciones de formulación y que las demostraciones sean pruebas.

- Pero debe también dar a los alumnos los medios para encontrar en esta historia particular que les ha hecho vivir, lo que es el saber cultural y comunicable que ha querido enseñarles. Los alumnos deben a su turno redescontextualizar y redespersonalizar su saber con el fin de identificar su producción con el saber que se utiliza en la comunidad científica y cultural de su época.

- Claro está, se trata de una simulación que no es la <> actividad científica, así como el conocimiento presentado de manera axiomática no es el <> conocimiento". (Brousseau, 1986).

---

[3] Por transposición didáctica se designa, en sentido estricto, "el paso de un contenido de saber preciso a una versión didáctica de este objeto de saber" (Chevallard,1985). Se puede recurrir al siguiente esquema para ilustrar esta definición: saber disciplinar –saber objeto de enseñanza– saber en la escuela (citado por Jean Portugais), en Didactique des mathematiques et formation des enseignants, París, Peter Lang, 1995.

---

2. Referentes Curriculares

2.3 Una nueva visión del conocimiento matemático en la escuela

En los últimos años, los nuevos planteamientos de la filosofía de las matemáticas, el desarrollo de la educación matemática y los estudios sobre sociología del conocimiento, entre otros factores, han originado cambios profundos en las concepciones acerca de las matemáticas escolares. Ha sido importante en este cambio de concepción, el reconocer que el conocimiento matemático, así como todas las formas de conocimiento, representa las experiencias de personas que interactúan en entornos, culturas y períodos históricos particulares y que, además, es en el sistema escolar donde tiene lugar gran parte de la formación matemática de las nuevas generaciones y por ello la escuela debe promover las condiciones para que ellas lleven a cabo la construcción de los conceptos matemáticos mediante la elaboración de significados simbólicos compartidos.

El conocimiento matemático en la escuela es considerado hoy como una actividad social que debe tener en cuenta los intereses y la afectividad del niño y del joven. Como toda tarea social debe ofrecer respuestas a una multiplicidad de opciones e intereses que permanentemente surgen y se entrecruzan en el mundo actual. Su valor principal está en que organiza y da sentido a una serie de prácticas, a cuyo dominio hay que dedicar esfuerzo individual y colectivo. La tarea del educador matemático conlleva entonces una gran responsabilidad, puesto que las matemáticas son una herramienta intelectual potente, cuyo dominio proporciona privilegios y ventajas intelectuales.

Estas reflexiones han dado lugar a que la comunidad de educadores matemáticos haya ido decantando una nueva visión de las matemáticas escolares basada en:

- Aceptar que el conocimiento matemático es resultado de una evolución histórica, de un proceso cultural, cuyo estado actual no es, en muchos casos, la culminación definitiva del conocimiento y cuyos aspectos formales constituyen sólo una faceta de este conocimiento.

- Valorar la importancia que tienen los procesos constructivos y de interacción social en la enseñanza y en el aprendizaje de las matemáticas.

- Considerar que el conocimiento matemático (sus conceptos y estructuras), constituyen una herramienta potente para el desarrollo de habilidades de pensamiento.

- Reconocer que existe un núcleo de conocimientos matemáticos básicos que debe dominar todo ciudadano.
- Comprender y asumir los fenómenos de transposición didáctica.
- Reconocer el impacto de las nuevas tecnologías tanto en los énfasis curriculares como en sus aplicaciones.
- Privilegiar como contexto del hacer matemático escolar las situaciones problemáticas.

> Hacer matemáticas implica que uno se ocupe de problemas, pero a veces se olvida que resolver un problema no es más que parte del trabajo; encontrar buenas preguntas es tan importante como encontrarles soluciones.

En primer lugar, para aceptar que el conocimiento matemático es el resultado de una evolución histórica se requiere profundizar en el análisis de este proceso, análisis que transforma el conocimiento de áridos hechos y destrezas en conocimiento ansiosa y tesoneramente buscado, construido por seres humanos que se corren arduos y largos caminos, esto es, la perspectiva histórica conlleva a concebir la matemática como una ciencia humana por ende no acabada ni constituida por verdades infalibles, en ocasiones falible pero capaz de corregir sus errores; a su vez este análisis permite alcanzar un conocimiento más profundo de la matemática misma ya que en el proceso histórico los objetos matemáticos aparecen en su verdadera perspectiva.

El conocimiento de la historia proporciona además una visión dinámica de las matemáticas y permite apreciar cómo sus desarrollos han estado relacionados con las circunstancias sociales y culturales e interconectados con los avances de otras disciplinas, lo que trae consigo importantes implicaciones didácticas: posibilidad de conjeturar acerca de desarrollos futuros, reflexión sobre limitaciones y alcances en el pasado, apreciación de las dificultades para la construcción de nuevo conocimiento.

Es importante resaltar que el valor del conocimiento histórico al abordar el conocimiento matemático escolar no consiste en recopilar una serie de anécdotas y curiosidades para presentarlas ocasionalmente en el aula. El conocimiento de la historia puede ser enriquecedor, entre otros aspectos, para orientar la comprensión de ideas en una forma significativa, por ejemplo, en lugar de abordar los números enteros desde una perspectiva netamente estructural a la cual se llegó después de trece siglos de maduración, podrían considerarse aquellos momentos culminantes en su desarrollo para proporcionar aproximaciones mas intuitivas a este concepto; para poner de manifiesto formas diversas de construcción y de razonamiento; para enmarcar temporal y espacialmente las grandes ideas y problemas junto con su motivación y precedentes y para señalar problemas abiertos de cada época, su evolución y situación actual.

Respecto a las relaciones existentes entre cultura y matemáticas, numerosas investigaciones se han ocupado de ellas, algunas se han centrado en la relación entre cultura y aprendizaje. Revisiones al respecto han sido elaboradas por Bacon y Carter (1991) y han tomado como base el análisis de las diferencias entre colectivos respecto a estilos perceptuales, desarrollo espacial, resolución de problemas, lenguaje, reconocimiento de invariantes y actitudes culturales hacia el aprendizaje. Como resultado de estas investigaciones, por una parte, se reconoce hoy el contexto cultural como elemento importante que puede proveer al individuo de aptitudes, competencias y herramientas para resolver problemas y para representar las ideas matemáticas, lo que explica que una determinada cultura desarrolle más significativamente unas u otras ramas de la matemática, sin querer esto decir desde luego que la aptitud matemática sea privilegio de una cultura o grupo. De otro lado, vale la pena destacar especialmente cómo a partir de estas investigaciones se ha podido establecer el hecho de que diferentes culturas han llegado a desarrollos matemáticos similares trabajando independientemente y que han realizado actividades matemáticas semejantes, como el contar, localizar, medir, diseñar, jugar y explicar, actividades éstas que resultan ser universales. Estos elementos analizados en profundidad han permitido a su vez identificar componentes epistemológicas del conocimiento matemático.

Como una consecuencia fundamental de esta perspectiva cultural la educación matemática debería conducir al estudiante a la apropiación de los elementos de su cultura y a la construcción de significados socialmente compartidos, desde luego sin dejar de lado los elementos de la cultura matemática universal construidos por el hombre a través de la historia durante los últimos seis mil años.

Es de anotar además que dentro de esta misma perspectiva, los alumnos aportan su propia cultura al aula de matemáticas y a su vez los matemáticos trabajan desde su propia cultura, constituida esta última por su hacer y por los elementos que integran su práctica. Hacer que tiene que ver por ejemplo, con la discusión al interior de esta comunidad acerca de qué matemáticas y qué formas de demostración son consideradas válidas, y elementos tales como el lenguaje, los problemas abiertos, sus formas de argumentación y un conjunto de teorías que integran sus ideas sobre cómo se deben llevar a la práctica las matemáticas.

En la década de los ochenta se empezó a reconocer a nivel mundial que el énfasis dado en la matemática básica a lo estructural había sido exagerado y de consecuencias negativas como se mencionó anteriomente. A raíz de esto se empezó a rescatar el valor de lo empírico y de lo intuitivo en los procesos de construcción del conocimiento matemático en la escuela. Esto ha llevado a involucrar significativamente la manipulación y la experiencia con los objetos que sirven de apoyo a los procesos de construcción sin restar importancia desde luego a la comprensión y a la reflexión, que posteriormente deben conducir a la formalización rigurosa.

La didáctica que asume la matemática como un legado cultural inmodificable que debe ser transmitido al estudiante, conlleva la concepción de que el profesor es un transmisor del conocimiento y el estudiante un receptor pasivo que asimila dicho conocimiento, pero la experiencia nos ha mostrado que el significado del mensaje enviado por el profesor no es el mismo significado del que da cuenta el estudiante, bastaría con analizar por ejemplo los niveles de logro en el área de matemáticas en general.

Lo anterior ha llevado a replantear dentro de la práctica y el discurso didáctico los modelos de enseñanza; frente al modelo de enseñanza tradicional que privilegia el objeto de conocimiento y concede un papel pasivo al sujeto, están los modelos de enseñanza que toman como referente la perspectiva constructivista. Para estos últimos es la actividad del sujeto la que resulta primordial: no hay “objeto de enseñanza” sino “objeto de aprendizaje”; a partir de las estructuras que ya posee, de sus concepciones previas, el sujeto construye nuevos significados del objeto de aprendizaje, los socializa, los contrasta con los significados de otros y con el conocimiento disciplinar socialmente aceptado.

Pero es importante anotar aquí que el conocimiento matemático no se genera de modo rápido y acabado, todo proceso de aprendizaje es lento y nunca está totalmente concluido (con frecuencia, como lo comenta el doctor Miguel de Guzmán en su libro La enseñanza de las ciencias y de las matemáticas, sorprende el descubrimiento de nuevas e insólitas relaciones que proporcionan visiones fecundas aún a sujetos que tienen un conocimiento matemático ya consolidado); la red de relaciones entre conceptos y estructuras matemáticas es prácticamente inagotable, permite generar continuamente nuevos procedimientos y algoritmos; no es posible pues, dar por terminado el dominio de ningún concepto en un breve período de tiempo, ni pretender que se logre automáticamente una conexión significativa entre un conocimiento nuevo y aquellos conocimientos previamente establecidos.

En el terreno didáctico a la relación sujeto-objeto debe sumarse la dimensión social del proceso educativo; en efecto, la dimensión social nos sugiere que en un proceso de aprendizaje aparte del aspecto puramente cognitivo, de cómo asimila el estudiante, hay que considerar qué asimila, lo cual proviene del entorno social que entrega ya legitimadas como objetos de enseñanza determinadas estructuras conceptuales. La institución escolar que constituye el entorno social recoge como objetos de enseñanza las transposiciones de objetos conceptuales creados en el dominio de la investigación matemática, esto nos enfrenta a lo que parecen dos formas diferentes de conocimiento: el que se construye dentro de la práctica de la investigación en el interior de la matemática (saber académico) y el que se transforma en conocimiento enseñable como resultado de una transposición didáctica. Un buen proceso de transposición debería permitir al estudiante deconstruir el conocimiento transpuesto para recuperar un significado más profundo, esto es, más próximo al saber académico.

El papel del docente desde la perspectiva descrita anteriormente, cambia de manera radical. No será desde luego ni un simple transmisor ni un simple “usuario” de los textos o de un currículo particular, sino más bien parte activa del desarrollo, implementación y evaluación del currículo. Fundamentalmente su papel será el de propiciar una atmósfera cooperativa que conduzca a una mayor autonomía de los alumnos frente al conocimiento. Es así, como enriqueciendo el contexto deberá crear situaciones problemáticas que permitan al alumno explorar problemas, construir estructuras, plantear preguntas y reflexionar sobre modelos; estimular representaciones informales y múltiples y, al mismo tiempo, propiciar gradualmente la adquisición de niveles superiores de formalización y abstracción; diseñar además situaciones que generen conflicto cognitivo teniendo en cuenta el diagnóstico de dificultades y los posibles errores.

Respecto a la formación matemática básica, el énfasis estaría en potenciar el pensamiento matemático mediante la apropiación de contenidos que tienen que ver con ciertos sistemas matemáticos. Tales contenidos se constituyen en herramientas para desarrollar, entre otros, el pensamiento numérico, el espacial, el métrico, el aleatorio y el variacional que, por supuesto, incluye al funcional.

Aunque al desarrollo de cada tipo de pesamiento se le asocie como indispensable un determinado sistema, este último no agota todas las posibilidades. Otros sistemas pueden contribuir para ampliar y construir significados en cada tipo de pensamiento.

Así, por ejemplo, en el problema de averiguar por la equivalencia o no de dos volúmenes, aparte de la comprensión de la magnitud volumen, del procedimiento para medirlo, de la elección de la unidad, nociones éstas de sistemas métricos, estaría el conocimiento de los números utilizados, su tamaño relativo y los conceptos geométricos involucrados en la situación, nociones de sistemas numéricos y del geométrico, respectivamente.

Respecto al desarrollo de pensamiento numérico y ampliando algunos énfasis propuestos en la Resolución 2343, diríamos que algunos aspectos fundamentales estarían constituidos por el uso significativo de los números y el sentido numérico que suponen una comprensión profunda del sistema de numeración decimal, no sólo para tener una idea de cantidad, de orden, de magnitud, de aproximación, de estimación, de las relaciones entre ellos, sino además para desarrollar estrategias propias de la resolución de problemas. Otro aspecto fundamental sería la comprensión de los distintos significados y aplicaciones de las operaciones en diversos universos numéricos, por la comprensión de su modelación, sus propiedades, sus relaciones, su efecto y la relación entre las diferentes operaciones. Es de anotar que para el desarrollo del pensamiento numérico se requiere del apoyo de sistemas matemáticos más allá de los numéricos como el geométrico, el métrico, el de datos; es como si este tipo de pensamiento tomara una forma particular en cada sistema.

La geometría, por su mismo carácter de herramienta para interpretar, entender y apreciar un mundo que es eminentemente geométrico, constituye una importante fuente de modelación y un ámbito por excelencia para desarrollar el pensamiento espacial y procesos de nivel superior y, en particular, formas diversas de argumentación. Desde esta perspectiva los énfasis en el hacer matemático escolar estarían en aspectos como: el desarrollo de la percepción espacial y de las intuiciones sobre las figuras bi y tridimensionales, la comprensión y uso de las propiedades de las figuras y las interrelaciones entre ellas así como del efecto que ejercen sobre ellas las diferentes transformaciones, el reconocimiento de propiedades, relaciones e invariantes a partir de la observación de regularidades que conduzca al establecimiento de conjeturas y generalizaciones, el análisis y resolución de situaciones problemas que propicien diferentes miradas desde lo analítico, desde lo sintético y lo transformacional.

En cuanto a la medida se refiere, los énfasis están en comprender los atributos medibles (longitud, área, capacidad, peso, etc.) y su carácter de invarianza, dar significado al patrón y a la unidad de medida, y a los procesos mismos de medición; desarrollar el sentido de la medida (que involucra la estimación) y las destrezas para medir, involucrar significativamente aspectos geométricos como la semejanza en mediciones indirectas y los aspectos aritméticos fundamentalmente en lo relacionado con la ampliación del concepto de número. Es decir, el énfasis está en desarrollos del pensamiento métrico.

Respecto al álgebra, se considera que en un primer momento generaliza patrones aritméticos y posteriormente se constituye en una potente herramienta para la modelación de situaciones de cuantificación y de diversos fenómenos de variación y cambio, es por ello que debe involucrar entre otros aspectos el uso comprensivo de la variable y sus diferentes significados, la interpretación y modelación de la igualdad y de la ecuación, las estructuras algebráicas como medio de representación y sus métodos como herramientas en la resolución de problemas, la función y sus diferentes formas de representación, el análisis de relaciones funcionales y de la variación en general para explicar de qué forma un cambio en una cantidad produce un cambio en otra, y la contextualización de diversos modelos de dependencia entre variables, todos éstos desarrollos propios del pensamiento variacional.

La probabilidad y la estadística son ramas de las matemáticas que desarrollan procedimientos para cuantificar, proponen leyes para controlar y elaboran modelos para explicar situaciones que por presentar múltiples variables y de efectos impredecibles son consideradas como regidas por el azar, y por tanto denominadas aleatorias. El carácter globalizante de la probabilidad y la estadística está en la presencia del pensamiento aleatorio para la comprensión de fenómenos de la vida cotidiana y de las ciencias. Particularmente en el conocimiento matemático escolar este carácter globalizante se asume cuando el énfasis se hace en el tratamiento de situaciones no deterministas, en donde la recolección, la organización y la representación de los datos obedece a una intencionalidad que les dé sentido, que guíe su interpretación para la toma de decisiones y posteriores predicciones; el desarrollo de la intuición sobre la probabilidad mediante valoraciones cualitativas y mediante la exploración de problemas reales que permitan la elaboración de modelos de probabilidad.

En cuanto al impacto de las nuevas tecnologías en los procesos de aprendizaje y de enseñanza de las matemáticas, es de anotar que antes de pensar en la introducción de las calculadoras y de los computadores en el aula, es indispensable pensar primero en el conocimiento matemático tanto desde la disciplina misma como desde las transposiciones que éste experimente para devenir en conocimiento enseñable.

Es evidente que la calculadora y el computador aligeran y superan la capacidad de cálculo de la mente humana, por ello su uso en la escuela conlleva a enfatizar más la comprensión de los procesos matemáticos antes que la mecanización de ciertas rutinas dispendiosas.

En la educación básica primaria, la calculadora permite explorar ideas y modelos numéricos, verificar lo razonable de un resultado obtenido previamente con lápiz y papel o mediante el cálculo mental. Para cursos más avanzados las calculadoras gráficas constituyen herramientas de apoyo muy potentes para el estudio de funciones por la rapidez de respuesta a los cambios que se introduzcan en las variables y por la información pertinente que pueda elaborarse con base en dichas respuestas y en los aspectos conceptuales relacionados con la situación de cambio que se esté modelando.

Las nuevas tecnologías amplían el campo de indagación sobre el cual actúan las estructuras cognitivas que se tienen, enriquecen el currículo con las nuevas pragmáticas asociadas y lo llevan a evolucionar.

El uso de los computadores en la educación matemática ha hecho más accesible e importante para los estudiantes temas de la geometría, la probabilidad, la estadística y el álgebra.

Las nuevas tecnologías amplían el campo de indagación sobre el cual actúan las estructuras cognitivas que se tienen, enriquecen el currículo con las nuevas pragmáticas asociadas y lo llevan a evolucionar.

El uso efectivo de las nuevas tecnologías aplicadas a la educación es un campo que requiere investigación, desarrollo y formación de los docentes.

Al respecto se está adelantando un trabajo en el Ministerio de Educación Nacional para construir unos lineamientos para la incorporación de las Nuevas Tecnologías en el Currículo de Matemáticas.

2. Referentes Curriculares

2.4 Hacia una estructura curricular

Las consideraciones hechas anteriormente acerca de la naturaleza de las matemáticas, del quehacer matemático en la escuela, las justificaciones para aprender y enseñar matemáticas, los procesos que los niños siguen al aprender, y las relaciones de la matemática con la cultura, son elementos para tener en cuenta a la hora de proponer una estructura curricular del área al igual que su articulación con otras disciplinas en el proyecto educativo institucional.

Las matemáticas, lo mismo que otras áreas del conocimiento, están presentes en el proceso educativo para contribuir al desarrollo integral de los estudiantes con la perspectiva de que puedan asumir los retos del siglo XXI. Se propone pues una educación matemática que propicie aprendizajes de mayor alcance y más duraderos que los tradicionales, que no sólo haga énfasis en el aprendizaje de conceptos y procedimientos sino en procesos de pensamiento ampliamente aplicables y útiles para aprender cómo aprender.

Por otra parte, hay acuerdos en que el principal objetivo de cualquier trabajo en matemáticas es ayudar a las personas a dar sentido al mundo que les rodea y a comprender los significados que otros construyen y cultivan. Mediante el aprendizaje de las matemáticas los alumnos no sólo desarrollan su capacidad de pensamiento y de reflexión lógica sino que, al mismo tiempo, adquieren un conjunto de instrumentos poderosísimos para explorar la realidad, representarla, explicarla y predecirla; en suma, para actuar en y para ella.

El aprendizaje de las matemáticas debe posibilitar al alumno la aplicación de sus conocimientos fuera del ámbito escolar, donde debe tomar decisiones, enfrentarse y adaptarse a situaciones nuevas, exponer sus opiniones y ser receptivo a las de los demás.

Es necesario relacionar los contenidos de aprendizaje con la experiencia cotidiana de los alumnos, así como presentarlos y enseñarlos en un contexto de situaciones problemáticas y de intercambio de puntos de vista.

De acuerdo con esta visión global e integral del quehacer matemático, proponemos considerar tres grandes aspectos para organizar el currículo en un todo armonioso:

- **Procesos generales** que tienen que ver con el aprendizaje, tales como el razonamiento; la resolución y planteamiento de problemas; la comunicación; la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.

- **Conocimientos básicos** que tienen que ver con procesos específicos que desarrollan el pensamiento matemático y con sistemas propios de las matemáticas.

Estos procesos específicos se relacionan con el desarrollo del pensamiento numérico, el espacial, el métrico, el aleatorio y el variacional, entre otros.

Los sistemas son aquéllos propuestos desde la Renovación Curricular: sistemas numéricos, sistemas geométricos, sistemas de medida, sistemas de datos y sistemas algebraicos y analíticos.

"El objetivo de enseñar las habilidades del pensamiento no se debería considerar, por tanto, como algo opuesto al de enseñar el contenido convencional sino como un complemento de éste. La capacidad del pensamiento y el conocimiento son como la trama y la urdimbre de la competencia intelectual, y el desarrollo de cualquiera de las dos cosas en detrimento de la otra, nos produciría algo muy distante de una tela de buena calidad" [4].

El hecho de que el pensamiento numérico requiera para su desarrollo de los sistemas numéricos, no quiere decir que éstos lo agoten, sino que es necesario ampliar el campo de su desarrollo con otros sistemas como los de medida, los de datos, etcétera.

- **El contexto** tiene que ver con los ambientes que rodean al estudiante y que le dan sentido a las matemáticas que aprende. Variables como las condiciones sociales y culturales tanto locales como internacionales, el tipo de interacciones, los intereses que se generan, las creencias, así como las condiciones económicas del grupo social en el que se concreta el acto educativo, deben tenerse en cuenta en el diseño y ejecución de experiencias didácticas.

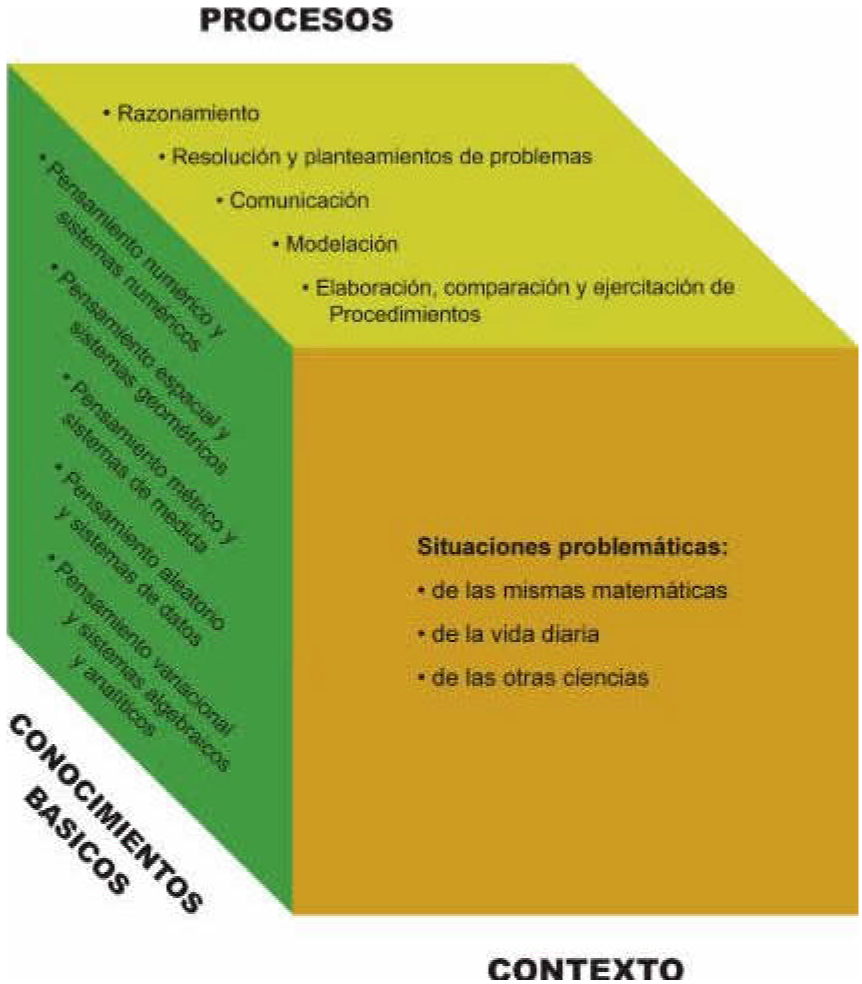
Para aprovechar el contexto como un recurso en el proceso de enseñanza se hace necesaria la intervención continua del maestro para modificar y enriquecer ese contexto con la intención de que los estudiantes aprendan. Estas intervenciones generan preguntas y situaciones interesantes que por estar relacionadas con su entorno son relevantes para el estudiante y le dan sentido a las matemáticas. Así es como del contexto amplio se generan situaciones problemáticas.

El diseño de una situación problemática debe ser tal que además de comprometer la afectividad del estudiante, desencadene los procesos de aprendizaje esperados. La situación problemática se convierte en un microambiente de aprendizaje que puede provenir de la vida cotidiana, de las matemáticas y de las otras ciencias. Podría afirmarse que la situación problemática resulta condicionada en mayor o menor medida por factores constituyentes de cada contexto.

De la interpretación de las relaciones entre estos grandes aspectos pueden surgir varios modelos, que como tales presentan limitaciones y posibilidades para estructurar el currículo.

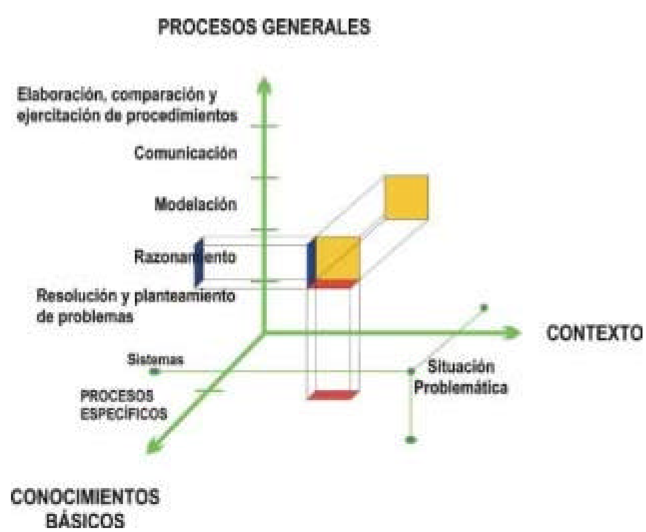
A continuación se presentan cuatro de los posibles modelos que se propusieron durante la construcción de estos lineamientos.

- Considerar los procesos generales, los conocimientos básicos y el contexto como las dimensiones de un cubo:



Cada cara del cubo se proyecta en su opuesta de tal manera que al observar el cubo desde cualquiera de sus puntas se observan los tres aspectos para significar la presencia de éstos en cualquier momento del acto educativo. Uno de los inconvenientes de este modelo es la interpretación pasiva que se le pueda dar, sin atribuirle la interrelación y dinámica de los tres aspectos. El hecho de presentar bajo un mismo aspecto los diferentes tipos de pensamiento y los sistemas, podría interpretarse como si cada pensamiento se desarrollara solamente a través del respectivo sistema desconociendo el carácter transistémico de cada tipo de pensamiento.

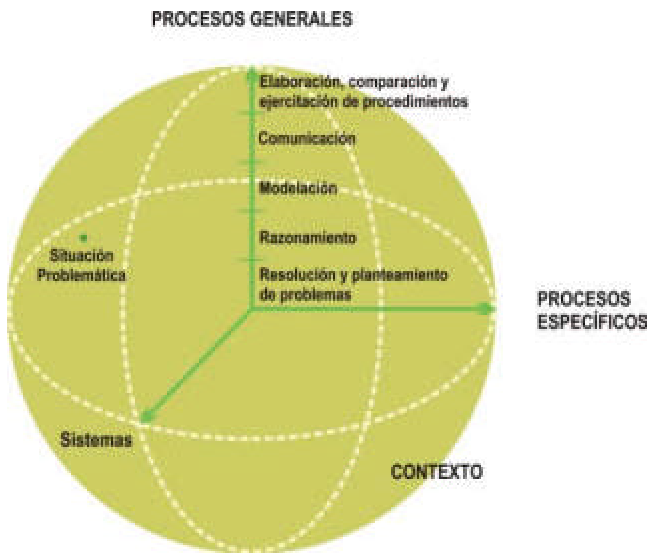
- Considerar los mismos aspectos como los tres ejes de un espacio tridimensional:



Dependiendo de cómo se representen las componentes en cada eje, como puntos o como segmentos, se tendrán respectivamente puntos del espacio o pequeños cubos como resultado de la interacción entre ellas. La dificultad radica en que se pueden obtener muchas combinaciones de estas componentes y habría que referirse a cada una de ellas; un solo cubito o un solo punto restringe la riqueza de la interacción entre los tres aspectos.

Así por ejemplo, una situación problemática donde se trabaje con los números fraccionarios no se puede restringir a un sólo proceso de aprendizaje como el razonamiento, se involucran otros procesos que están estrechamente relacionados con la actividad matemática, como los de modelación, comunicación, entre otros.

- Un tercer modelo representa sobre los ejes del espacio tridimensional los procesos generales, los tipos de pensamiento y los sistemas propios de las matemáticas. El contexto es como el espacio que los envuelve y se representa con una esfera.



En este modelo el hecho de que los procesos específicos y los sistemas se hayan representado en diferentes ejes no significa que no exista una correlación entre cada tipo de pensamiento y cada sistema matemático. Por ejemplo, el pensamiento numérico, además de estar presente en la compresión del sistema numérico, también está vinculado a los sistemas métricos, sistemas de datos y en general a los demás sistemas.

Cualquier momento del proceso de enseñanza y aprendizaje debe ser visto como una región de este sistema tridimensional en el cual siempre deben estar presentes las tres dimensiones consideradas para que la intervención educativa sea completa y significativa.

El hecho de presentar bajo un mismo aspecto los diferentes tipos de pensamiento y los sistemas, podría interpretarse como si cada pensamiento se desarrollara solamente a través del respectivo sistema desconociendo el carácter transistémico de cada tipo de pensamiento.

Se propone que las tres dimensiones señaladas se desarrollen al interior de situaciones problemáticas entendidas éstas como el espacio en el cual los estudiantes tienen la posibilidad de hacerse sus propias preguntas o encontrar pleno significado a las preguntas de otros, llenar de sentido las acciones (físicas o mentales) necesarias para resolverlas, es decir, es el espacio donde el estudiante define problemas para sí.

- Otro modelo que también usa el sistema tridimensional considera como componentes los procesos generales, los conocimientos básicos y las fases del proceso de enseñanza: una enseñanza para el aprendizaje constructivo de las matemáticas escolares. El contexto, lo mismo que en el tercer modelo, es envolvente.

Para que la enseñanza cumpla con lo dicho anteriormente se presentan algunas reflexiones concernientes al conocimiento y al trabajo que previamente, durante y después de la intervención educativa son objeto de indagación por parte del docente.

Para una comprensión holística del trabajo del docente centraremos la atención en tres de sus fases:

– Fase preactiva

– Fase interactiva

– Fase posactiva (Linares, 1991)

Para Llinares la fase preactiva es la preparación del "plan de actuación", plan que puede considerarse como el boceto que de su obra elabora un artista. Este boceto, en el caso de la enseñanza de las matemáticas, debe tomar en consideración las decisiones acerca de qué enseñar y cómo enseñarlo. Para ello se requiere:

- **Un conocimiento de los estudiantes**, relacionado no solamente con sus percepciones e ideas previas sobre las matemáticas, sino también una reflexión acerca del porqué y del para qué de los aprendizajes, como posibilidad de diseñar situaciones problemáticas acordes con el contexto, los intereses y las necesidades de los estudiantes.

Los conocimientos, experiencias, sentimientos y actitudes de éstos hacia las matemáticas van a condicionar, en parte, la forma en que se desarrolle el proceso de enseñanza. Por tanto, el boceto no puede pensarse hasta el detalle, con todo previsto, sino como un análisis previo de diferentes alternativas que se puedan adoptar.

Para asegurar la calidad del boceto es necesario, también, volver a reflexionar de manera profunda sobre el conocimiento matemático con el fin de reinterpretarlo y hacerlo "apto" para la enseñanza.

En este momento no es suficiente conocer el currículo ni el texto escolar (ambos interpretaciones del conocimiento matemático) sino que es indispensable volver a la historia del desarrollo de los conceptos para reconocer en ella las preguntas que les dieron origen, lo mismo que las dificultades y los errores que tuvieron que superarse antes de ser aceptados y reconocidos como tales por la comunidad científica. Esta búsqueda asumida como actitud del docente y de los estudiantes libera las matemáticas del carácter lineal, rígido y acabado que a veces se les asigna y le devuelve su condición de ciencia eminentemente humana, no lineal en su desarrollo y que, en algunos casos, surgió de problemas provenientes de otras ciencias y en otros de las matemáticas mismas.

Teniendo en cuenta que los conocimientos matemáticos se dejan aprehender por medio de sus representaciones, un momento bien importante de la fase preactiva, que debe ser contemplado en el boceto, es la previsión de las formas de comunicación o de representación facilitadoras del aprendizaje. De ahí la necesidad de resignificar la importancia de la pregunta para que recupere el carácter desestabilizador y promotor de conflicto en las concepciones de los estudiantes. Sin esta intención no puede garantizarse el paso de las concepciones hacia el proceso de conceptualización.

La selección de textos escolares y de los materiales didácticos es determinante en la calidad y pertinencia de las representaciones y por ende de la comunicación.

El diseño de las situaciones problemáticas debe ser coherente con los logros de aprendizaje propuestos en el Diseño Curricular de la institución. Conviene además prever algunos indicadores de logros como hipótesis para observar la clase, lo mismo que algunas estrategias para la solución de los problemas que se generan.

Esta fase se sistematiza a través de lo que hoy se conoce como "diseño de unidades didácticas".

La fase interactiva, conocida también como de experimentación, es la puesta en acción del boceto. Esta fase se apoya en dos ideas fundamentales: una interrelación entre personas con el objeto de "compartir y dar forma" al significado de las matemáticas escolares en el ambiente psico-social del aula (naturaleza interactiva de la enseñanza) y la toma en consideración de que el significado personal que los estudiantes le dan a las nociones matemáticas depende de sus conocimientos y experiencias previas.

Las interacciones entre el docente y los estudiantes, y las que se tejen entre éstos últimos provocadas por la situación problemática, generan una negociación activa de significados de las nociones matemáticas. En este proceso de negociación todos aprenden. El docente modifica y enriquece los elementos presentes en el boceto con base en las estrategias, en aprendizajes no previstos, en dificultades y errores de los estudiantes; podría decirse que para él la experiencia de enseñar es al mismo tiempo la oportunidad de aprender con los estudiantes. Los estudiantes en interacción con el docente y en diálogos cooperativos entre ellos mismos, establecen conexiones entre lo que previamente saben y lo nuevo. La pregunta correcta y oportuna es de vital importancia, dado que las respuestas son reveladoras del nivel de comprensión y desarrollo de los procesos y de las nociones matemáticas involucradas en ellas. En la discusión los estudiantes aprenden a comunicar sus puntos de vista y a escuchar las argumentaciones de los otros, validan formas de representación y construyen socialmente el conocimiento.

Las formas de enseñar condicionan las formas de evaluar. Cuando se privilegia la construcción activa del conocimiento y la negociación de significados –y si además el docente tiene una actitud investigativa–, las interacciones en la clase se convierten en una fuente de referentes para la evaluación cualitativa y para introducir en el boceto los cambios que reduzcan las dificultades y mejoren el aprendizaje significativo en los estudiantes.

La fase posactiva es, según Llinares, de reflexión y nueva comprensión y tiene como propósito aprender de la propia experiencia. Desde esta visión el docente construye nuevo conocimiento con base en la reflexión acerca de sus concepciones y conocimientos antes de actuar y la práctica realmente desarrollada. Este ejercicio de monitoreo aproxima al docente a una nueva comprensión de los contenidos básicos desde la perspectiva de la enseñanza y el aprendizaje, y conlleva la revisión y los acercamientos entre los resultados y lo esperado.

La consideración de estas tres fases unida a la investigación en el aula, propician el desarrollo profesional del docente desde su propia práctica.

Las formas de enseñar condicionan las formas de evaluar. Cuando se privilegia la construcción activa del conocimiento y la negociación de significados las interacciones en la clase se convierten en una fuente de referentes para la evaluación cualitativa y para introducir en el boceto los cambios que reduzcan las dificultades y mejoren el aprendizaje significativo en los estudiantes.

Las reflexiones que susciten estos modelos enriquecidos con la experiencia en el aula y con los saberes de los docentes, seguramente originarán otros modelos que respondan a las exigencias planteadas en los Proyectos Educativos Institucionales.

A continuación ampliaremos los aspectos considerados en los diferentes modelos.

____

4. Perkins, David y otros, Enseñar a pensar, Barcelona, Ediciones Paidós, 1994, pág. 82.

2.4 Hacia una estructura curricular

2.4.1 Las situaciones problemáticas: Un contexto para acercarse al conocimiento matemático en la escuela

El acercamiento de los estudiantes a las matemáticas, a través de situaciones problemáticas procedentes de la vida diaria, de las matemáticas y de las otras ciencias es el contexto más propicio para poner en práctica el aprendizaje activo, la inmersión de las matemáticas en la cultura, el desarrollo de procesos de pensamiento y para contribuir significativamente tanto al sentido como a la utilidad de las matemáticas.

Tradicionalmente los alumnos aprenden matemáticas formales y abstractas, descontextualizadas, y luego aplican sus conocimientos a la resolución de problemas presentados en un contexto. Con frecuencia "estos problemas de aplicación" se dejan para el final de una unidad o para el final del programa, razón por la cual se suelen omitir por falta de tiempo.

Las aplicaciones y los problemas no se deben reservar para ser considerados solamente después de que haya ocurrido el aprendizaje, sino que ellas pueden y deben utilizarse como contexto dentro del cual tiene lugar el aprendizaje. El contexto tiene un papel preponderante en todas las fases del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, es decir, no sólo en la fase de aplicación sino en la fase de exploración y en la de desarrollo, donde los alumnos descubren o reinventan las matemáticas.

Esta visión exige que se creen situaciones problemáticas en las que los alumnos puedan explorar problemas, plantear preguntas y reflexionar sobre modelos.

Miguel de Guzmán plantea que "la enseñanza a partir de situaciones problemáticas pone el énfasis en los procesos de pensamiento, en los procesos de aprendizaje y toma los contenidos matemáticos, cuyo valor no se debe en absoluto dejar a un lado, como campo de operaciones privilegiado para la tarea de hacerse con formas de pensamiento eficaces.

Se trata de considerar como lo más importante:

– que el alumno manipule los objetos matemáticos;

– que active su propia capacidad mental;

– que reflexione sobre su propio proceso de pensamiento con el fin de mejorarlo conscientemente;

– que, de ser posible, haga transferencias de estas actividades a otros aspectos de su trabajo mental;

– que adquiera confianza en sí mismo;

– que se divierta con su propia actividad mental;

– que se prepare así para otros problemas de la ciencia y, posiblemente, de su vida cotidiana;

– que se prepare para los nuevos retos de la tecnología y de la ciencia" [5].

Existen varias razones para considerar la importancia de las situaciones problemáticas como contexto. Este autor menciona las siguientes:

– porque es lo mejor que podemos proporcionar a nuestros jóvenes: capacidad autónoma para resolver sus propios problemas;

– porque el mundo evoluciona muy rápidamente, los procesos efectivos de adaptación a los cambios de nuestra ciencia y de nuestra cultura no se hacen obsoletos;

– porque el trabajo se puede hacer atrayente, divertido, satisfactorio, autorrealizador y creativo;

– porque muchos de los hábitos que así se consolidan tienen un valor universal, no limitado al mundo de las matemáticas;

– porque es aplicable a todas las edades.

Investigadores holandeses del Instituto Freudenthal [6]. consideran entre otras las siguientes razones:

- Se puede ver la importancia de distintos tópicos de las matemáticas, como por ejemplo la proporción y la pendiente de una línea y la manera como contribuyen a que los alumnos entiendan cómo se emplean las matemáticas en la sociedad y en la vida cotidiana.

- Los alumnos aprenden a usar las matemáticas en la sociedad y a descubrir qué matemáticas son relevantes para su educación y profesión posteriores. Puesto que es importante que todos los alumnos aprendan matemáticas como parte de su educación básica, también es importante que sepan por qué las aprenden. A través del contexto desarrollarán una actitud crítica y flexible ante el uso de las matemáticas en problemas que deberán afrontar en la vida real.

- Se acerca a los estudiantes a la historia tanto de las matemáticas como de las demás disciplinas e incrementa su interés por ésta.

- Despiertan la creatividad de los alumnos y los impulsa a emplear estrategias informales y de sentido común. Al afrontar un problema en un contexto eficaz, los alumnos desarrollan la capacidad de analizar dicho problema y de organizar la información. Las estrategias intuitivas que desarrollan pueden constituir un buen punto de partida natural en la evolución de las matemáticas más formales, es decir de la búsqueda de sentido.

- Un buen contexto puede actuar como mediador entre el problema concreto y las matemáticas abstractas. En el proceso de resolución, el problema se transformará en un modelo que puede evolucionar desde un modelo de la situación a un modelo para todos los problemas que se le asemejan desde el punto de vista matemático.

---

5. Miguel de Guzmán, Enseñanza de las ciencias y de las matemáticas, Editorial Popular, Madrid, 1993, pág. 111.

6. Martín van Reeuwijk, “Las matemáticas en la vida cotidiana y la vida cotidiana en las matemáticas”, en: UNO. Revista de didáctica de las matemáticas No. 12, Editorial Grao, Barcelona, 1997, págs.13-14.

2.4 Hacia una estructura curricular

2.4.2 Conocimientos básicos

2.4.2 Conocimientos básicos

2.4.2.1 Pensamiento numérico y sistemas numéricos

En la mayor parte de las actividades de la vida diaria de una persona y en la mayoría de profesiones se exige el uso de la aritmética.

El énfasis que se ha hecho en el estudio de los números ha ido cambiando a través de las diferentes propuestas curriculares. El énfasis que ahora hacemos en el estudio de los sistemas numéricos es el desarrollo del pensamiento numérico. Se puede decir que una de las herramientas para desarrollar dicho pensamiento son los sistemas numéricos.

En esta propuesta vamos a hablar del pensamiento numérico como un concepto más general que sentido numérico, el cual incluye no sólo éste, sino el sentido operacional, las habilidades y destrezas numéricas, las comparaciones, las estimaciones, los órdenes de magnitud, etcétera.

En los Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática (NCTM, 1989), sentido numérico es "una intuición sobre los números que surge de todos los diversos significados del número" (página 38). Los autores de estos estándares afirman que los niños con sentido numérico comprenden los números y sus múltiples relaciones, reconocen las magnitudes relativas de los números y el efecto de las operaciones entre ellos, y han desarrollado puntos de referencia para cantidades y medidas.

En este sentido Mcintosh (1992) amplía este concepto y afirma que "el pensamiento numérico se refiere a la comprensión general que tiene una persona sobre los números y las operaciones junto con la habilidad y la inclinación a usar esta comprensión en formas flexibles para hacer juicios matemáticos y para desarrollar estrategias útiles al manejar números y operaciones". Así se refleja una inclinación y una habilidad para usar números y métodos cuantitativos como medios para comunicar, procesar e interpretar información, y se crea la expectativa de que los números son útiles y de que las matemáticas tienen una cierta regularidad.

El pensamiento numérico se adquiere gradualmente y va evolucionando en la medida en que los alumnos tienen la oportunidad de pensar en los números y de usarlos en contextos significativos, y se manifiesta de diversas maneras de acuerdo con el desarrollo del pensamiento matemático. En particular es fundamental la manera como los estudiantes escogen, desarrollan y usan métodos de cálculo, incluyendo cálculo escrito, cálculo mental, calculadoras y estimación, pues el pensamiento numérico juega un papel muy importante en el uso de cada uno de estos métodos. La invención de un algoritmo y su aplicación hace énfasis en aspectos del pensamiento numérico tales como la descomposición y la recomposición, y la comprensión de propiedades numéricas. Cuando se usa un algoritmo ya sea utilizando papel y lápiz o calculadora, el pensamiento numérico es importante cuando se reflexiona sobre las respuestas.

El pensamiento numérico se adquiere gradualmente y va evolucionando en la medida en que los alumnos tienen la oportunidad de pensar en los números y de usarlos en contextos significativos.

Otras situaciones que involucran el desarrollo del pensamiento numérico hacen referencia a la comprensión del significado de los números, a sus diferentes interpretaciones y representaciones, a la utilización de su poder descriptivo, al reconocimiento del valor (tamaño) absoluto y relativo de los números, a la apreciación del efecto de las distintas operaciones, al desarrollo de puntos de referencia para considerar números. En general estos puntos de referencia son valores que se derivan del contexto y evolucionan a través de la experiencia escolar y extraescolar de los estudiantes. Otro indicador valioso del pensamiento numérico es la utilización de las operaciones y de los números en la formulación y resolución de problemas y la comprensión de la relación entre el contexto del problema y el cálculo necesario, lo que da pistas para determinar si la solución debe ser exacta o aproximada y también si los resultados a la luz de los datos del problema son o no razonables.

El contexto mediante el cual se acercan los estudiantes a las matemáticas es un aspecto determinante para el desarrollo del pensamiento, por tanto para la adquisición del sentido numérico es necesario proporcionar situaciones ricas y significativas para los alumnos. Claramente, el pensamiento numérico es a veces determinado por el contexto en el cual las matemáticas evolucionan, por ejemplo, mientras un estudiante en la escuela no se incomoda porque 514 sea la suma de 26 + 38, el mismo estudiante en una tienda puede exigir que se le revise la cuenta si tiene que pagar $5140 por dos artículos cuyos precios son $260 y $380. Para otro estudiante resulta más fácil decir que en 1/2 libra de queso hay más que en 1/4 de libra, que determinar cuál es mayor entre 1/4 1/2.

La manera como se trabajen los números en la escuela contribuye o no a la adquisición del pensamiento numérico. Los estudiantes que son muy hábiles para efectuar cálculos con algoritmos de lápiz y papel (éste es el indicador mediante el cual se mide con frecuencia el éxito en las matemáticas) pueden o no estar desarrollando este pensamiento.

Cuando un estudiante de 6º grado dice que 3/4+5/6=8/10, o un estudiante de 2º grado afirma que 40-36=16, están intentando aplicar un algoritmo que han aprendido pero no están manifestando pensamieto numérico.

En realidad toda la importancia que en este momento se está dando al desarrollo del pensamiento numérico en la educación, es una reacción al énfasis tan grande que se le ha dado a los algoritmos para efectuar cálculos, los cuales se tratan a veces de una forma mecánica sin considerar la comprensión de los conceptos que los fundamentan.

El conocimiento de que los números se pueden representar de diferentes maneras, junto con el reconocimiento de que algunas representaciones son más útiles que otras en ciertas situaciones de resolución de problemas, es valioso y esencial para desarrollar pensamiento numérico.

Ejemplos: reconocer que 2+2+2+2 es lo mismo que 4x2 es una conexión conceptual útil entre adición y multiplicación.

Reconocer que $300 son $200 más $100 ó 3 monedas de 100, o reconocer a 30 minutos como 1/2 hora, resultaría útil en ciertas situaciones.

En un grado más avanzado, se puede reflejar el pensamiento numérico si se reconocen diferentes simbolizaciones para un mismo número, tales como 3/4=6/8 ó, 3/4= 0.75 ó 3/4=75%.

Otro aspecto importante del pensamiento numérico es la “comparación con puntos de referencia”; ésta se refiere al uso de puntos fijos comunes en nuestro sistema de numeración que son útiles para hacer juicios. Por ejemplo, cuando se considera la fracción 5/8, uno puede imaginársela gráficamente (como parte de un círculo o sobre una recta numérica) o en una fracción equivalente o en forma decimal. Una representación igualmente importante es darse cuenta que 5/8 es “un poco más que 1/2” o está entre 1/2 y 3/4”. Aquí la mitad sirve como un punto de referencia para representar y comparar otros números.

A continuación proponemos tres aspectos básicos, sobre los cuales hay acuerdo, que pueden ayudar a desarrollar el pensamiento numérico de los niños y de las niñas a través del sistema de los números naturales y a orientar el trabajo en el aula:

- Comprensión de los números y de la numeración
- Comprensión del concepto de las operaciones
- Cálculos con números y aplicaciones de números y operaciones

Haremos una breve descripción de cada uno de ellos dando algunos ejemplos de “competencias” o “comprensiones” que se espera que los alumnos muestren o utilicen.

COMPRENSIÓN DE LOS NÚMEROS Y DE LA NUMERACIÓN

La comprensión de conceptos numéricos apropiados se puede iniciar con la construcción por parte de los alumnos de los significados de los números, a partir de sus experiencias en la vida cotidiana, y con la construcción de nuestro sistema de numeración teniendo como base actividades de contar, agrupar y el uso del valor posicional.

Significados de los números: Los números tienen distintos significados para los niños de acuerdo con el contexto en el que se emplean. En la vida real se utilizan de distintas maneras, entre las cuales están las siguientes (Rico, 1987):

- Como secuencia verbal
- Para contar
- Para expresar una cantidad de objetos o como cardinal
- Para medir

- Para marcar una posición o como ordinal
- Como código o símbolo
- Como una tecla para pulsar

Como secuencia verbal los números se utilizan en su orden habitual (uno, dos, tres, etc.), sin hacer referencia a ningún objeto externo, a veces con el propósito de recitar la secuencia o de cronometrar la duración de un juego o una carrera (por ejemplo diciendo los números de 1 a 10), etc. Los niños aprenden rápidamente a contar números por repetición de pautas verbales.

Cuando los números se usan para **contar**, cada uno se asocia a un elemento de un conjunto de objetos discretos. Este contexto conlleva el correcto empleo de la correspondencia biunívoca que a cada número asocia un objeto.

Cuando un número natural describe la cantidad de elementos de un conjunto bien definido de objetos discretos, se está usando el número **como cardinal**.

Los números se utilizan **para medir** cuando describen la cantidad de unidades de alguna magnitud continua (como longitud, superficie, volumen, capacidad, peso, etc.), que se supone dividida en múltiplos de la unidad correspondiente y que nos permite contestar a la pregunta ¿cuántas unidades hay?

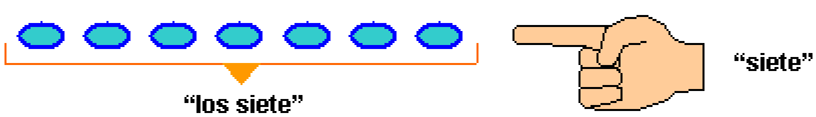
En un contexto **ordinal** el número describe la posición relativa de un elemento en un conjunto discreto y totalmente ordenado, en el que se ha tomado uno de los elementos como inicial. Muchas de las actividades y juegos de los niños requieren colocar "puestos" o colocar orden.

En los contextos de **código**, los números se utilizan para distinguir clases de elementos. Son etiquetas que identifican cada una de las clases. El ejemplo más familiar para los niños lo constituyen los números que llevan los jugadores de un equipo de fútbol. Los números del 1 al 11 representan las posiciones teóricas en las que juegan: portero, defensa lateral izquierdo, central, extremo izquierdo, etc. Otros ejemplos son los números telefónicos, los indicativos para llamadas a larga distancia, las categorías socio-profesionales, etcétera.

Actualmente, con el uso de las calculadoras y los computadores, el número se emplea **como una tecla**, en el que está asociado con un resorte diferenciado, que hay que accionar físicamente para su utilización. Solamente están representados los números del 0 al 9, y con ellos se pueden representar los demás, hasta un límite entre 8 y 12 dígitos dependiendo del aparato.

Para que los niños logren entender el significado de los números, además del uso cotidiano, hay que darles la oportunidad de realizar experiencias en las que utilicen materiales físicos y permitirles que expresen sus reflexiones sobre sus acciones y vayan construyendo sus propios significados.

Es de anotar que la construcción misma del concepto de número requiere de un largo proceso en el que uno de sus indicadores se ubica en el momento en que los niños logran integrar los aspectos ordinal y cardinal del número, es decir, cuando al contar asocia a la última palabra número un doble significado: para distinguir un objeto que tiene la misma categoría de los restantes y para representar la cantidad de objetos de la colección. Es pasar, por ejemplo, de "el siete" a "los siete".



Acerca de cómo se logra esta integración son varias las estrategias didácticas desde las cuales los investigadores en educación matemática hacen sus aportes a los docentes de nivel preescolar; lo mejor es consultar dichas investigaciones y decidir desde el contexto y la experiencia cuál sería la hipótesis de trabajo más adecuada.

La comprensión significativa del sistema de numeración, que incluya una apreciación de su estructura, su organización y su regularidad, es fundamental para comprender conceptos numéricos.

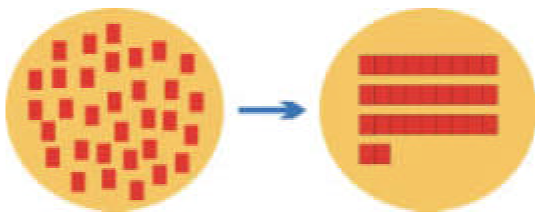
Algunas investigaciones sugieren que "antes de ingresar a la escuela la mayoría de los niños están familiarizados de manera intuitiva con el sistema de 'unidades y decenas' para expresar los números en forma oral. Es, sin embargo, poco probable que reconozcan el significado de la representación de los números, por ejemplo, cuarenta y dos (a saber cuatro decenas y dos unidades), ni que tengan la menor idea del aspecto que realmente ofrecían 42 objetos. Así pues, es necesario que en la escuela los alumnos tengan mucha experiencia en la apreciación del tamaño de los números, sin olvidar su tamaño relativo, aparte del trabajo más formal de lectura y escritura de números, antes de poder comenzar a comprender la importancia de la posición de las cifras dentro de los mismos números" (Dickson, 1991).

Se consideran tres actividades o destrezas que al reflexionar sobre ellas y relacionarlas ayudan a los niños a comprender nuestro sistema de numeración, que son: contar, agrupar y el uso del valor posicional.

La destreza de contar es uno de los indicadores de que los niños comprenden conceptos numéricos, es esencial para la ordenación y comparación de números. Contar hacia adelante, contar hacia atrás y contar a saltos son aspectos sucesivos que hay que tener en cuenta en este proceso.

Nuestro sistema de numeración se basa en el principio de agrupación sucesiva, en el cual las unidades son agrupadas en decenas; colecciones de diez decenas se agrupan en centenas; éstas se agrupan en millares y así sucesivamente. Es lo que se conoce como un sistema de base 10.

Por ejemplo, para hallar el tamaño de una colección como la siguiente se agrupan sus objetos , se obtiene:



Esto nos permite escribir el número 32. El agrupamiento puede hacerse explícitamente mediante material concreto o implícitamente mediante las palabras que designan los números.

La comprensión del valor posicional es otro aspecto esencial en el desarrollo de conceptos numéricos de los niños. "Antes de la enseñanza formal del valor posicional, el significado que los niños le atribuyen a los números mayores se basa normalmente en la cuenta de uno en uno y en la relación 'uno más que' que se da entre dos números naturales consecutivos. Ya que el sentido del valor posicional surge a partir de la experiencia de agrupamiento, la adquisición de la destreza de contar debe ser integrada en significados que se basen en el agrupamiento. Los niños serán entonces capaces de usar y comprender procedimientos de comparación, ordenación, redondeo y manejo de números mayores" [7].

El trabajo sobre el sistema de numeración y en especial sobre el valor posicional siempre se ha considerado importante en la escuela. Se han propuesto diferentes métodos para ayudar a los niños a lograr su comprensión, incluyendo el uso de material concreto y modelos, el estudio de varias bases, etc. Investigadores ingleses [8]. propusieron la siguiente secuencia de actividades para desarrollar las nociones de valor posicional como el de decenas y unidades, que pueden ser consideradas para avanzar progresivamente en este aspecto.

1. Agrupar por ejemplo lápices u otros objetos en bolsas de a diez y hablar de "decenas" y de objetos "sueltos" o unidades. Además, colocar los materiales de tal manera que los objetos "sueltos" queden a la derecha de los "grupos de a diez".

2. Unir los objetos, no sólo agruparlos, por ejemplo ensartando pepitas en un hilo, o utilizando bloques de construcción ensamblados en decenas.

3. Desarrollar actividades con materiales estructurados o prefabricados como los bloques de Dienes Base 10, en los que se distinguen los cubos individuales pero no se pueden desarmar.

4. Pasar a decenas y unidades en las que las decenas no tengan señaladas ni se distingan las unidades individuales, por ejemplo una tira de cartulina.

5. Para representar las decenas y las unidades ahora se pueden utilizar objetos que sólo se distingan por el color o la posición. Por ejemplo, colocar objetos idénticos de izquierda a derecha, separados en columnas para representar "dieces" o "unos", según la posición.

Ahora puede resultar fácil utilizar un ábaco o un modelo similar como pepitas colocadas en surcos de cartón separados (puede ser por una línea), en donde cada surco representa una "posición" en la representación del número.

Los investigadores afirman que si se le da al niño la oportunidad de pasar por estas etapas puede captar la creciente abstracción que supone el paso de la agrupación de objetos en decenas y unidades a su representación mediante unas mismas entidades, como pepitas, en la cual la posición reviste una gran importancia para determinar si una pepita denota una decena o una unidad.

Teniendo una base como ésta los alumnos pueden apreciar la importancia del valor posicional cuando se utilizan los dígitos de 0 a 9 en vez de colocar pepitas o cuentas de un ábaco.

COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE LAS OPERACIONES

Una parte importante del currículo de matemáticas en la educación básica primaria, se dedica a la comprensión del concepto de las operaciones fundamentales de adición, sustracción, multiplicación y división entre números naturales.

Los aspectos básicos que según varios investigadores (por ejemplo, NCTM, 1989; Dickson, 1991; Rico, 1987; Mcintosh, 1992) se pueden tener en cuenta para construir el significado de las diferentes operaciones y que pueden dar pautas para orientar el aprendizaje de cada operación, tienen que ver con:

- reconocer el significado de la operación en situaciones concretas, de las cuales emergen;
- reconocer los modelos mas usuales y prácticos de las operaciones;
- comprender las propiedades matemáticas de las operaciones;
- comprender el efecto de cada operación y las relaciones entre operaciones.

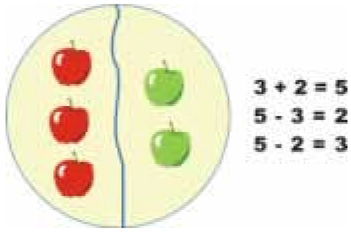
En el proceso de aprendizaje de cada operación hay que partir de las distintas acciones y transformaciones que se realizan en los diferentes contextos numéricos y diferenciar aquellas que tienen rasgos comunes, que luego permitan ser consideradas bajo un mismo concepto operatorio. Por ejemplo las acciones más comunes que dan lugar a conceptos de adición y sustracción son agregar y desagregar, reunir y separar, acciones que se trabajan simultáneamente con las ideas que dan lugar al concepto de número.

Al destacar los aspectos cuantitativos de las acciones, en donde el niño describe las causas, etapas y efectos de una determinada acción, en una segunda etapa está abstrayendo las diferentes relaciones y transformaciones que ocurren en los contextos numéricos haciendo uso de diversos esquemas o ilustraciones con los cuales se está dando un paso hacia la expresión de las operaciones a través de modelos.

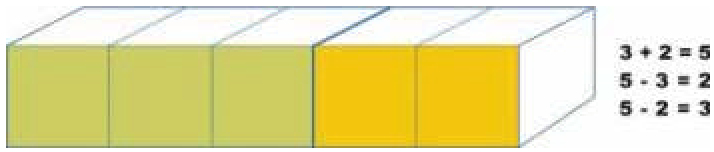
Cada operación tiene sus propios modelos que ponen de manifiesto los contextos generales del número y la peculiaridad de cada operación.

Los dos modelos concretos utilizados con más frecuencia para ilustrar el significado de las operaciones de adición y sustracción según Dickson (1991) están basados en:

a) Objetos individuales



b) Longitudes continuas



Estas ilustraciones tienen relación y permiten ilustrar otros tipos de problemas que casi nunca se proponen en el salón de clase.

La mayoría del trabajo dedicado al significado de las operaciones se ha limitado a resolver problemas "verbales o de enunciados" un poco artificiales y a menudo los alumnos no saben cuándo utilizar una operación porque les falta conocer diversas situaciones específicas que dan origen a éstas. Se les suele enseñar la adición como "poner juntos o reunir" y la sustracción como "quitar", a pesar de que existen muchas otras situaciones que implican operaciones de sumar y de restar. Es muy importante que los alumnos conozcan y trabajen en la resolución de diferentes tipos de problemas verbales.

Se han propuesto diversos tipos de problemas para la adición y la sustracción, entre los cuales los más comunes son los siguientes:

- **Para la adición**

Presentamos cinco ejemplos de problemas con una posible descripción, cada uno de los cuales da un significado concreto para 3+2.

a) **Unión. Parte - parte - todo**

Juan tiene 3 carritos grandes y 2 carritos pequeños. ¿Cuántos carritos tiene en total?

b) **Añadir o adjunción**

Juan tiene 3 carritos. Compra 2 más. ¿Cuántos carritos tiene ahora?

c) **Comparación**

Juan tiene 3 carritos. María tiene 2 carritos más que Juan. ¿Cuántos carritos tiene María?

d) **Sustracción complementaria**

Juan le da 2 carritos a María. Ahora le quedan 3. ¿Cuántos tenía al empezar?

e) **Sustracción vectorial**

Esta mañana Juan perdió 2 carritos. Al medio día tenía 3 carritos más que al desayuno. ¿Cuántos carritos se encontró?

Se puede ver que la adición es un proceso aplicable a la resolución de una variedad de problemas, bastante fáciles algunos de ellos y difíciles otros.

- **Para la sustracción**

Se presentan algunos ejemplos que dan origen a la expresión 5-3.

a) **Separación o quitar**

Juan tiene 5 carritos. Pierde 3. ¿Cuántos le quedan?

b) **Comparación - Diferencia**

María tiene 5 carritos y Juan tiene 3.

¿Cuántos carritos más tiene María que Juan?

¿Cuántos carritos menos tiene Juan que María?

¿Qué diferencia hay entre el número de carritos que tiene María y el número de los que tiene Juan?

c) **Parte- parte- todo. Unión**

Juan tiene 5 carritos, 3 son grandes. ¿Cuántos son pequeños?

d) **Adjunción. Añadir**

Juan quiere 5 carritos. Ya tiene 3.¿Cuántos más necesita?

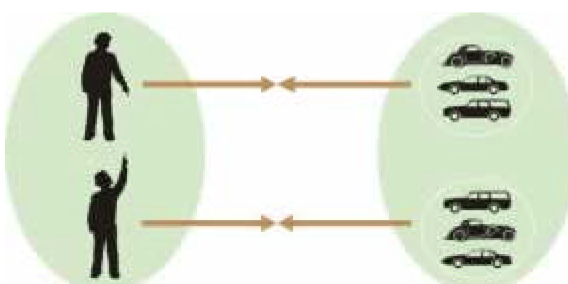
e) **Añadir**

Juan tenía algunos carritos. Ha comprado 3 más. Ahora tiene 5. ¿Cuántos tenía al empezar?

f) **Sustracción vectorial**

Juan perdió hoy 5 carritos. Por la mañana perdió 3. ¿Cuántos perdió por la tarde?

En cuanto a la multiplicación y la división muchos investigadores han señalado que la comprensión de sus significados es mucho más difícil que la de la adición y la sustracción, debido a la estructura de la operación. Afirman que la adición y sustracción están asociadas con situaciones en las que se combinan o disocian dos conjuntos de objetos similares mientras que en la multiplicación y la división esto no ocurre, sino que en cada caso se asocia cada uno de los elementos de uno de los conjuntos con un subconjunto equivalente del otro:



$$3 \times 2 = 6$$
$$6 \div 3 = 2$$
$$6 \div 2 = 3$$

A continuación daremos algunos ejemplos de diferentes tipos de problemas asociados a la multiplicación y a la división que se han identificado.

- **Para la multiplicación**

Problemas asociados a la expresión 3 x 4

a) **Factor multiplicante**

Juan tenía 3 carritos. María tenía 4 veces más.¿Cuántos carritos tenía María?

b) **Adición repetida**

Juan compró 3 carritos cada día durante 4 días. ¿Cuántos carritos tiene en total?

c) **Razón**

Cuatro niños tenían 3 carritos cada uno. ¿Cuántos carritos tenían en total?

d) **Producto cartesiano**

Un carrito de juguete se fabrica en 3 tamaños distintos y en 4 colores diferentes. ¿Cuántos carritos distintos se pueden comprar?

Al igual que en la adición existen modelos o interpretaciones concretas que se ayudan de analogías discretas o continuas como las siguientes, algunos resultan más sencillos de reconocer como problemas de multiplicación que otros. Por ejemplo se halló que el modelo de "razón" resultaba más sencillo para algunos niños que el de "producto cartesiano".

Factor multiplicante y razón

Producto cartesiano

- **Para la división**

Los dos tipos de problemas más usuales para la división son:

a) **Repartir**

Juan tenía 12 carritos. Quería colocarlos en 4 hileras iguales. ¿Cuántos debía colocar en cada hilera?

b) **Agrupamiento o sustracción repetida**

Juan tenía 12 carritos. Quería colocarlos en hileras de 4.¿Cuántas hileras podía hacer?

Los significados que los niños captan más fácilmente son aquellos que tienen que ver con una acción, como "añadir", "quitar", "repartir", lo cual coincide con la idea de Piaget de que las operaciones son acciones internalizadas.

Hay que tener en cuenta que la comprensión de las operaciones con números se va desarrollando gradualmente y se va ampliando considerando una gama cada vez más grande y abstracta de situaciones.

Comprensión de las propiedades matemáticas de las operaciones: las propiedades matemáticas se han incluido por mucho tiempo en los programas de las matemáticas escolares. Desafortunadamente se estudian como reglas formales y se ven como enunciados muy obvios y de poca importancia práctica.

Para apreciar las propiedades es necesario que los niños sean capaces de considerar los números como entidades existentes manipulables por derecho propio e independientes de cualquier contexto particular.

Lo más importante en el trabajo con las propiedades no es que los alumnos las expresen con símbolos o palabras, sino que sean capaces de manejar los números con solvencia al resolver problemas de la vida real, y en especial, para efectuar operaciones con destreza y eficacia, tanto en el cálculo mental como con calculadora.

Comprensión del efecto de las operaciones: una conceptualización completa de una operación implica la comprensión del efecto de la operación sobre varios números incluyendo naturales y racionales. A menudo se usan modelos para ayudar a los estudiantes a comprender la acción de la operación. Por ejemplo, modelar la multiplicación como una adición repetida suministra una forma concreta de ayudar a los alumnos a pensar en la multiplicación así como también en cómo resolverla. Es importante explorar varios modelos para la multiplicación para que los estudiantes vean tanto el poder de un modelo como sus limitaciones. Por ejemplo, pensar en la multiplicación como adición repetida puede conducir a generalizaciones incorrectas ("la multiplicación siempre hace las cosas más grandes"). Una variedad de modelos tales como una recta numérica o un modelo de arreglo son útiles en la medida en que los niños ven la multiplicación en una variedad de contextos y modelos.

Examinar los cambios en la respuesta a medida que el tamaño de los operandos varía.

En una operación contribuye a la comprensión de las operaciones. Por ejemplo, ¿qué pasa cuando dos números menores que 1 se multiplican?, ¿cómo se puede modelar esta situación?, ¿qué pasa si uno de los factores es menor que 1 y el otro es mayor que 1?

Reflexionar sobre las interacciones entre las operaciones y los números estimula un alto nivel de pensamiento numérico.

Comprensión de las relaciones entre operaciones: las conexiones entre operaciones proporcionan más formas para pensar y resolver problemas.

Ejemplo: para responder la pregunta ¿cuántas ruedas tienen 8 triciclos?, los estudiantes pueden pensar y aplicar un procedimiento de conteo (contar de en una cada rueda), o

pueden aplicar la adición repetida (sumando el número de ruedas de cada triciclo: 3+3+3+3+3+3+3+3), o pueden adicionar agrupando (hacer 4 grupos de a 2 triciclos cada uno: 6+6+6+6), o aplicar la multiplicación (8 x 3 o 6 x 4).

Cada una de estas soluciones refleja una forma ligeramente diferente de pensar sobre el problema.

La relación inversa entre operaciones es otra conexión valiosa que proporciona al estudiante otra forma de pensar sobre el problema.

Por ejemplo, para hallar el cociente de 840 ÷ 8, se puede ver como 8 x ? = 840 más que como un problema de división. Esto significa que se conoce la relación inversa que existe entre la división y la multiplicación.

Las relaciones entre operaciones se amplían en la medida en que los operandos aumentan desde números naturales hasta números racionales. Cuando se exploran los números racionales, es natural explorar y utilizar relaciones adicionales, tales como aquellas que se establecen entre la división y la multiplicación.

Ejemplo: multiplicar por 0.1 es equivalente a dividir por 10; y dividir por 0.1 es equivalente a multiplicar por 10. Cuando un alumno comprende y descubre las relaciones que conectan la multiplicación y la división, puede ampliar su rango de estrategias para resolver problemas.

Cálculos con números y aplicaciones de números y operaciones: "La finalidad de los cálculos es la resolución de problemas. Por lo tanto, aunque el cálculo sea importante para las matemáticas y para la vida diaria, la era tecnológica en que vivimos nos obliga a replantear la forma en que se utiliza el cálculo hoy día. Hoy casi todos los cálculos complejos los hacen las calculadoras y los computadores. En muchas situaciones de la vida diaria, las respuestas se calculan mentalmente o basta con una estimación, y los algoritmos con lápiz y papel son útiles cuando el cálculo es razonablemente simple" (NCTM,1989).

Tradicionalmente el trabajo con las operaciones en la escuela se ha limitado a que los niños adquieran destrezas en las rutinas de cálculo con lápiz y papel a través de los algoritmos formales, antes de saber aplicarlas en situaciones y problemas prácticos, muchas veces sin comprender ni los conceptos que los fundamentan ni el significado de las operaciones.

Los hallazgos que actualmente nos arrojan muchas investigaciones sobre los métodos informales que utilizan los niños y los adultos para hacer sus cálculos y el uso cada vez más amplio de las calculadoras de bolsillo, nos han permitido reflexionar sobre la importancia de que los niños desarrollen otras destrezas de cálculo, además de los algoritmos escritos formales, como son el cálculo mental, la aproximación, y la estimación y utilización de las calculadoras en la resolución de problemas que impliquen números muy grandes y cálculos complejos. De esta manera cada alumno podrá elaborar sus propios algoritmos o métodos informales y estrategias, y utilizarlos de acuerdo con las características de cada situación.

En relación con los algoritmos formales no vamos a extendernos, pues es uno de los aspectos del currículo más trabajados por los docentes y por los investigadores en nuestro país [9]. Se ha insistido, entre otros aspectos, en que se debe hacer énfasis en la comprensión de los conceptos subyacentes, en el uso de materiales físicos para crear modelos de los procedimientos, en conectar ese trabajo con materiales con los pasos a seguir en el algoritmo, en entender su utilidad en situaciones de la vida diaria y en desarrollar patrones de pensamiento.

Los algoritmos informales constituyen una actividad mucho más importante que trabajar solamente con un algoritmo particular. Lo esencial es la búsqueda de algoritmos válidos, compararlos, modificar los ya existentes y saber cuándo aplicarlos.

Las investigaciones de Ginsburg (citado por Dickson, 1991) señalan que los niños poseen una potente aritmética informal y que lo que comprenden y hacen a nivel intuitivo es mucho más amplio y de mayor magnitud que lo que hacen en el nivel escrito y simbólico del cálculo. Resaltan la potencia de los métodos de recuento de que se valen los niños, como por ejemplo contar con los dedos, contar marcas, contar a partir de uno o contar a partir del mayor de los números, y los considera la base para los métodos informales. También dice que los niños no utilizan los algoritmos aprendidos en la escuela, sino que más bien los integran en su propia estructura mental para inventar métodos basados en la aritmética escrita y codificada y en parte en su enfoque característico.

Otros investigadores también citados por esta misma autora afirman que la capacidad de los niños para crear sus propias estrategias antes de ingresar a la escuela, es muy grande; que ellos disponen de un amplio repertorio de estrategias y se valen de ellas para resolver distintos tipos de problemas. Así mismo investigadores ingleses descubrieron que dentro de toda la gama de habilidades operatorias, los niños preferían emplear métodos informales basados en la adición y en la sustracción para resolver problemas prácticos.

En esta línea, en nuestro país los trabajos realizados por Germán Mariño [10], nos muestran algoritmos informales que utilizan los adultos no escolarizados de Corabastos para hacer sus cuentas.

Muchos de los procedimientos informales de cálculo descansan en tácticas o estrategias de cálculo mental.

El cálculo mental y la estimación dan una gran oportunidad a los alumnos para hacer más dinámicas las operaciones y para desarrollar ideas sobre relaciones numéricas. Concierne estimularlos para que exploren e inventen estrategias alternativas para el cálculo mental.

La estimación es una actividad matemática muy poderosa para usar tanto en la resolución de problemas como en la comprobación de lo razonable de los resultados. Incluye tomar decisiones sobre si la respuesta del cálculo es razonable o no, si un número dado es mayor o menor que la respuesta exacta, si la respuesta es mayor o menor que un número dado como referencia y si una estimación está en el correcto orden de magnitud.

Algunos autores no distinguen entre estimación y aproximación; otros afirman que mientras la estimación es un ejercicio mental, la aproximación usualmente requiere de alguna herramienta. Alba Thompson llama a la estimación "una adivinanza educada visualmente, que generalmente se hace en el contexto del número de objetos de una colección, del resultado de un cálculo numérico o de la medida de un objeto".

Además de la utilidad que en la vida cotidiana tiene la realización de cálculos mentales, exactos o aproximados, su necesidad se ve reforzada con la aparición de la calculadora. Un manejo inteligente de ésta exige el desarrollo de técnicas de cálculo mental, que anticipen el resultado esperado para controlar posibles errores de manejo.

El uso frecuente de calculadoras, de cálculo mental y de estimaciones ayuda a que el niño desarrolle un punto de vista más realista sobre las operaciones y sea más flexible en la selección de métodos de cálculo.

Aplicaciones de números y operaciones: resolver problemas del mundo real que requieran razonar con números y aplicar operaciones implica tomar una serie de decisiones como: decidir qué tipo de respuesta es apropiada (exacta o aproximada), decidir qué herramienta de cálculo es eficiente y accesible (calculadora,cálculo mental, etc.), escoger una estrategia , aplicarla, revisar los datos y resultados para verificar lo razonables que son, y tal vez repetir el ciclo utilizando una estrategia alternativa.

Este proceso involucra diferentes tipos de decisiones. Primero, la comprensión de la relación entre el contexto del problema y el cálculo necesario. Segundo, una conciencia de que existen varias estrategias para efectuar el cálculo y una inclinación a escoger una estrategia eficiente. Finalmente, incluye un instinto para revisar reflexivamente la respuesta y confrontarla, tanto para verificar que el cálculo esté correcto, como para ver su relevancia en el contexto del problema original.

Comprensión de las relaciones entre el contexto del problema y el cálculo necesario:

El contexto del problema no sólo da pistas para las operaciones apropiadas sino para los números que se usan en estas operaciones y si una solución exacta o aproximada es apropiada.

Ejemplo: considerar la siguiente información:

Sonia gastó $2880 en manzanas, $2380 en bananos y $3760 en naranjas.

Con relación a esta situación pueden surgir muchas preguntas diferentes y la forma como se manejen esos números depende de la pregunta. Por ejemplo, si la pregunta es: ¿cuánto gastó Sonia en frutas?, se necesita dar un total para producir una respuesta exacta y aplicar alguno de los diferentes métodos de cálculo (mental, escrito o calculadora). De otro lado, supongamos que la pregunta es: ¿puede Sonia pagar estas frutas con un billete de $10000? En este caso, se usa la estimación para decidir rápidamente y con más seguridad que $10000 son suficientes para hacer el mercado.

Conciencia de que existen varias estrategias:

El pensamiento numérico implica reconocer que con frecuencia existen diferentes estrategias de solución para un problema dado. Cuando una estrategia inicial parece ser improductiva, la respuesta apropiada es formular y aplicar una estrategia alternativa. Esta tendencia a dedicarse a un problema explorándolo de diversas maneras permite comparaciones de diferentes métodos antes de hacer un juicio definitivo o dedicarse a una sola estrategia.

Inclinación a usar una representación o método eficiente:

Ser conscientes de que algunas estrategias o herramientas de cálculo son más eficientes que otras (por lo menos algunas veces) es también un indicador de sentido numérico. Por ejemplo, si se le pide a un estudiante de 2º grado que adicione 8+7, probablemente descarte la estrategia de contar de uno en uno, escogiendo más bien recomponer mentalmente el problema (como 7+7+1, basado en que dos sietes son 14, o como 8+2+5, usando el conocimiento que 8+2=10).

Se ha observado que los niños o adultos con poco pensamiento numérico a menudo usan métodos de cálculo más difíciles. Las razones para esto varían, pero con frecuencia resultan de hábitos establecidos desde una larga mecanización de un método de cálculo particular, falta de confianza en métodos alternativos de cálculo y falta de conocimiento de tales alternativas.

Inclinación a revisar datos y resultados:

Cuando se produce una solución, las personas con pensamiento numérico examinan su respuesta a la luz del problema original (considerando los números incluidos lo mismo que la pregunta pedida) para determinar si la respuesta "tiene sentido". Esta reflexión generalmente se hace en forma rápida y natural y llega a ser una parte integral del proceso de resolución de problemas. Esta revisión metacognitiva del contexto del problema podría involucrar una reflexión de las estrategias que se usaron, lo mismo que una evaluación de la estrategia particular seleccionada, y finalmente una comprobación para determinar si la respuesta que se produjo fue sensata o razonable.

Los estudiantes a menudo omiten esta comprobación precisamente porque el resultado (en realidad el problema en sí) no es importante para ellos.

---

7. NCTM, Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática, edición en castellano: Sociedad Andaluza de Educación Matemática "THALES", Sevilla, 1989, pág. 39.

8. Del Inner London Education Authority (ILEA) Abbey Wood Mathematics Centre.

9. Por ejemplo, puede verse la propuesta elaborada desde la Renovación Curricular para la construcción de dichos algoritmos en los Programas Curriculares para la Educación Básica Primaria, los trabajos de Jorge Castaño, y los de Orlando Mesa en "Camino a la aritmética" y "Criterios y estrategias para la enseñanza de las matemáticas".

10. Investigador del Grupo Dimensión Educativa, en "Cómo operan matemáticamente los adultos del sector popular".

2.4.2 Conocimientos básicos

2.4.2.2 Pensamiento espacial y sistemas geométricos

El estudio de la geometría intuitiva en los currículos de las matemáticas escolares se había abandonado como una consecuencia de la adopción de la "matemática moderna". Desde un punto de vista didáctico, científico e histórico, actualmente se considera una necesidad ineludible volver a recuperar el sentido espacial intuitivo en toda la matemática, no sólo en lo que se refiere a la geometría.

Howard Gardner en su teoría de las múltiples inteligencias considera como una de estas inteligencias la espacial y plantea que el pensamiento espacial es esencial para el pensamiento científico, ya que es usado para reprsentar y manipular información en el aprendizaje y en la resolución de problemas. El manejo de información espacial para resolver problemas de ubicación, orientación y distribución de espacios es peculiar a esas personas que tienen desarrollada su inteligencia espacial. Se estima que la mayoría de las profesiones científicas y técnicas, tales como el dibujo técnico, la arquitectura, las ingenierías, la aviación, y muchas disciplinas científicas como química, física, matemáticas, requieren personas que tengan un alto desarrollo de inteligencia espacial.

La propuesta de Renovación Curricular avanzó en este proceso enfatizando la geometría activa como una alternativa para restablecer el estudio de los sistemas geométricos como herramientas de exploración y representación del espacio.

En los sistemas geométricos se hace énfasis en el desarrollo del pensamiento espacial, el cual es considerado como el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones a representaciones materiales.

Los sistemas geométricos se construyen a través de la exploración activa y modelación del espacio tanto para la situación de los objetos en reposo como para el movimiento. Esta construcción se entiende como un proceso cognitivo de interacciones, que avanza desde un espacio intuitivo o sensorio-motor (que se relaciona con la capacidad práctica de actuar en el espacio, manipulando objetos, localizando situaciones en el entorno y efectuando desplazamientos, medidas, cálculos espaciales, etc.), a un espacio conceptual o abstracto relacionado con la capacidad de representar internamente el espacio, reflexionando y razonando sobre propiedades geométricas abstractas, tomando sistemas de referencia y prediciendo los resultados de manipulaciones mentales.

Este proceso de construcción del espacio está condicionado e influenciado tanto por las características cognitivas individuales como por la influencia del entorno físico, cultural, social e histórico. Por tanto, el estudio de la geometría en la escuela debe favorecer estas interacciones. Se trata de actuar y argumentar sobre el espacio ayudándose con modelos y figuras, con palabras del lenguaje ordinario, con gestos y movimientos corporales.

Geometría activa

Para lograr este dominio del espacio se sugiere el enfoque de geometría activa que parte de la actividad del alumno y su confrontación con el mundo. Se da prioridad a la actividad sobre la contemplación pasiva de figuras y símbolos, a las operaciones sobre las relaciones y elementos de los sistemas y a la importancia de las transformaciones en la comprensión aun de aquellos conceptos que a primera vista parecen estáticos. Se trata pues de 'hacer cosas', de moverse, dibujar, construir, producir y tomar de estos esquemas operatorios el material para la conceptualización o representación interna. Esta conceptualización va acompañada en un principio por gestos y palabras del lenguaje ordinario, hasta que los conceptos estén incipientemente construidos a un nivel suficientemente estable para que los alumnos mismos puedan proponer y evaluar posibles definiciones y simbolismos formales.

Veamos la diferencia entre mostrar y hacer, entre observar y actuar, entre simbolizar y conceptualizar en algunos ejemplos concretos.

La geometría activa es una alternativa para restablecer el estudio de los sistemas geométricos como herramientas de exploración y representación del espacio.

Cuerpos, superficies y líneas

Al pasar las manos por las caras o superficies de objetos, muebles y paredes se aprecia más que con cualquier definición la diferencia entre cuerpos y superficies, y entre superficies planas y curvas. La interrupción del movimiento prepara el concepto de superficie como frontera de un cuerpo, y el movimiento de la mano prepara el concepto de plano, el de región y el de área.

Al pasar el dedo por el borde común de dos superficies se aprecia la diferencia entre superficie y línea y entre línea recta y curva, y se prepara el concepto de longitud y el de prolongación de una línea en la misma dirección y sentido del movimiento del dedo. La interrupción del movimiento prepara el concepto de línea como frontera de una superficie, y el movimiento del dedo prepara el concepto de línea recta, el de segmento y el de longitud.

Al terminar el recorrido de un borde que termina en punta, esa interrupción del movimiento prepara el concepto de punto. Se sugiere la prioridad del cuerpo sobre la superficie, de ésta sobre la línea y de ésta sobre el punto [11].

Ángulo: los niños de 1, 2“ ó 3“ grado han tenido la oportunidad de dar vueltas completas, medias vueltas y cuartos de vueltas en sus juegos. Partiendo de esta experiencia, la aproximación activa al ángulo de giro puede lograrse muy fácilmente al extender el brazo y luego girarlo hasta detenerse en otra posición. Si se deja como señal de la posición inicial un palo o una pita o una marca en la pared, y se barre un ángulo de giro con el propio brazo y se mira la posición en que se detuvo, se puede llegar a una apreciación cualitativa de mayor a menor amplitud o apertura del ángulo de giro. Después de estabilizar la construcción de este concepto, se puede aceptar el ángulo pintado en el cuaderno como la huella de un giro que ya pasó. Así el ángulo orientado aparece primero que el ángulo sin orientación y se puede saber de qué ángulo se trata mientras se recuerde el giro que lo trazó. El giro es activo y el ángulo está pintado estáticamente.

Desarrollo del pensamiento geométrico

La moderna investigación sobre el proceso de construcción del pensamiento geométrico indica que éste sigue una evolución muy lenta desde las formas intuitivas iniciales hasta las formas deductivas finales, aunque los niveles finales corresponden a niveles escolares bastante más avanzados que los que se dan en la escuela.

El modelo de Van Hiele es la propuesta que parece describir con bastante exactitud esta evolución y que está adquiriendo cada vez mayor aceptación a nivel internacional en lo que se refiere a geometría escolar.

Van Hiele propone cinco niveles de desarrollo del pensamiento geométrico que muestran un modo de estructurar el aprendizaje de la geometría. Estos niveles son:

El Nivel 1. Es el nivel de la visualización, llamado también de familiarización, en el que el alumno percibe las figuras como un todo global, sin detectar relaciones entre tales formas o entre sus partes. Por ejemplo, un niño de seis años puede reproducir un cuadrado, un rombo, un rectángulo; puede recordar de memoria sus nombres. Pero no es capaz de ver que el cuadrado es un tipo especial de rombo o que el rombo es un paralelogramo particular. Para él son formas distintas y aisladas.

En este nivel, los objetos sobre los cuales los estudiantes razonan son clases de figuras reconocidas visualmente como de “la misma forma”.

El Nivel 2. Es un nivel de análisis, de conocimiento de las componentes de las figuras, de sus propiedades básicas. Estas propiedades van siendo comprendidas a través de observaciones efectuadas durante trabajos prácticos como mediciones, dibujo, construcción de modelos, etc. El niño, por ejemplo, ve que un rectángulo tiene cuatro ángulos rectos, que las diagonales son de la misma longitud, y que los lados opuestos también son de la misma longitud. Se reconoce la igualdad de los pares de lados opuestos del paralelogramo general, pero el niño es todavía incapaz de ver el rectángulo como un paralelogramo particular.

En este nivel los objetos sobre los cuales los estudiantes razonan son las clases de figuras, piensan en términos de conjuntos de propiedades que asocian con esas figuras.

El Nivel 3. Llamado de ordenamiento o de clasificación. Las relaciones y definiciones empiezan a quedar clarificadas, pero sólo con ayuda y guía. Ellos pueden clasificar figuras jerárquicamente mediante la ordenación de sus propiedades y dar argumentos informales para justificar sus clasificaciones; por ejemplo, un cuadrado es identificado como un rombo porque puede ser considerado como "un rombo con unas propiedades adicionales". El cuadrado se ve ya como un caso particular del rectángulo, el cual es caso particular del paralelogramo. Comienzan a establecerse las conexiones lógicas a través de la experimentación práctica y del razonamiento.

En este nivel, los objetos sobre los cuales razonan los estudiantes son las propiedades de clases de figuras.

El Nivel 4. Es ya de razonamiento deductivo; en él se entiende el sentido de los axiomas, las definiciones, los teoremas, pero aún no se hacen razonamientos abstractos, ni se entiende suficientemente el significado del rigor de las demostraciones.

Finalmente, el Nivel 5. Es el del rigor; es cuando el razonamiento se hace rigurosamente deductivo. Los estudiantes razonan formalmente sobre sistemas matemáticos, pueden estudiar geometría sin modelos de referencia y razonar formalmente manipulando enunciados geométricos tales como axiomas, definiciones y teoremas.

Las investigaciones de Van Hiele y de los psicólogos soviéticos muestran que el paso de un nivel a otro no es automático y es independiente de la edad. Muchos adultos se encuentran en un nivel 1 porque no han tenido oportunidad de enfrentarse con experiencias que les ayuden a pasar al nivel 2.

Sin embargo, algunos estudios han mostrado que la población estudiantil media no alcanza los dos últimos niveles, especialmente el del rigor, pues exige un nivel de cualificación matemático elevado, y que no hay mucha diferencia entre estos dos niveles.

Parece que los estudiantes deben recorrer un largo trecho entre los tres primeros niveles y los últimos de rigor y formalización, y que ese trecho no ha sido investigado suficientemente para detectar a su vez la existencia de niveles intermedios.

Aunque estos niveles son una aproximación aceptable a las posibles etapas en las que progresa el pensamiento geométrico, los docentes debemos ser críticos con respecto a ellos, pues no parecen dirigidos a lo que parecen ser los logros más importantes del estudio de la geometría: la exploración del espacio, el desarrollo de la imaginación tridimensional, la formulación y discusión de conjeturas, jugar con los diseños y teselaciones del plano y sus grupos de transformaciones. La propuesta de geometría activa, que parte del juego con sistemas concretos, de la experiencia inmediata del espacio y el movimiento, que lleva a la construcción de sistemas conceptuales para la codificación y el dominio del espacio, y a la expresión externa de esos sistemas conceptuales a través de múltiples sistemas simbólicos, no coincide con la descripción de Van Hiele, más orientada a la didáctica clásica de la geometría euclidiana y al ejercicio de las demostraciones en T o a doble columna.

Representación bidimensional del espacio tridimensional

Otro aspecto importante del pensamiento espacial es la exploración activa del espacio tridimensional en la realidad externa y en la imaginación, y la representación de objetos sólidos ubicados en el espacio.

Al respecto Lappan y Winter, afirman:

> A pesar de que vivimos en un mundo tridimensional, la mayor parte de las experiencias matemáticas que proporcionamos a nuestros niños son bidimensionales. Nos valemos de libros bidimensionales para presentar las matemáticas a los niños, libros que contienen figuras bidimensionales de objetos tridimensionales. A no dudar, tal uso de "dibujos" de objetos le supone al niño una dificultad adicional en el proceso de comprensión. Es empero, necesario que los niños aprendan a habérselas con las representaciones bidimensionales de su mundo. En nuestro mundo moderno, la información seguirá estando diseminada por libros y figuras, posiblemente en figuras en movimiento, como en la televisión, pero que seguirán siendo representaciones bidimensionales del mundo real" [12].

Para comunicar y expresar la información espacial que se percibe al observar los objetos tridimensionales es de gran utilidad el uso de representaciones planas de las formas y relaciones tridimensionales. Hay distintos tipos de tales representaciones. Cada una es importante para resaltar un aspecto, pero es necesario utilizar varias a la vez para desarrollar y completar la percepción del espacio.

> La representación en el plano de cuerpos sólidos o de objetos de la realidad, puede hacerse mediante dibujos de vista única o dibujos de vista múltiples. Los dibujos de vista única son aquellos en los que se ilustran las tres dimensiones del objeto en una sola vista, con lo cual se logra representar el objeto de una manera muy próxima a la realidad. Hay dos maneras de hacer estos dibujos: mediante axonometrías y mediante perspectivas cónicas.
>
> Los dibujos de vistas múltiples representan los objetos a través de una serie fragmentada de vistas relacionadas" [13].

El dibujo en perspectiva se puede utilizar con mucho provecho para la educación estética, y para el ejercicio de las proyecciones de objetos tridimensionales en la hoja de papel, y de la hoja de papel al espacio. Para esto último se puede empezar por dibujar cubos y cajas en perspectiva, de manera que unos oculten parcialmente a los otros, y luego tratar de colocar cubos y cajas de cartón sobre una mesa de manera que se vean como en el papel. Aun en el dibujo en perspectiva es difícil dibujar las elipses que representan las distintas maneras como aparece un círculo desde distintos puntos de vista. Por eso puede ser aconsejable limitar la perspectiva a figuras rectilíneas, a menos que los mismos alumnos quieran explorar cómo se dibujan las tapas de las alcantarillas en las calles ya dibujadas en perspectiva.

Las transformaciones

En la actualidad, gran parte de la geometría escolar se ha ocupado del movimiento de figuras geométricas desde una posición a otra, y de movimientos que cambian el tamaño o la forma. El estudio de las transformaciones de figuras ha ido progresivamente primando sobre la presentación formal de la geometría, basada en teoremas y demostraciones y en el método deductivo.

> La primacía de las figuras muertas y de las relaciones de paralelismo y perpendicularidad de líneas, y las de igualdad o congruencia o semejanza de figuras ocultaron por mucho tiempo el origen activo, dinámico de los conceptos geométricos, y dejaron en la penumbra las transformaciones. Los sistemas geométricos se redujeron a sus componentes, como los puntos, líneas y planos, segmentos de recta y curvas, y figuras compuestas por ellos, con sólo la estructura dada por las relaciones mencionadas.
>
> Esta propuesta intenta devolver la dinámica a los sistemas geométricos, con sus operadores y transformaciones, que resultan de internalizar en forma de esquemas activos en la imaginación, los movimientos, acciones y transformaciones que se ejecutan físicamente. Esto quiere decir que una transformación no puede definirse, ni mucho menos simbolizarse formalmente, antes de que los alumnos hayan hecho algunas transformaciones externas, moviéndose ellos mismos y moviendo hojas, varillas y otros objetos, deformándolos, rotándolos o deslizándolos unos sobre otros de manera física, de tal manera que ya puedan imaginarse esos movimientos sin necesidad de mover o transformar algo material, a lo más acompañando esta imaginación con movimientos del cuerpo o de las manos" [14].

Cuando se estudien estos sistemas de transformaciones, debe comenzarse por los desplazamientos que pueden hacerse con el propio cuerpo, o deslizando objetos y figuras sobre el plano del piso, del papel o del tablero. Con esto se llega primero a las rotaciones y a las traslaciones. Se trata de ver qué tipo de movimientos conservan la dirección, cuáles la orientación en el plano o en el espacio, cuáles cambian los órdenes cíclicos de los vértices, sin definir verbalmente ninguna de estas transformaciones.

En los talleres con los maestros hemos comprobado la dificultad que tienen para distinguir esos aspectos activos que los niños captan inmediatamente, y la resistencia que sienten al ver que en realidad no se puede definir con palabras qué es traslación ni qué es rotación. Definirlas por medio de las reflexiones es un engaño, pues tampoco se pueden definir las reflexiones por medio de definiciones verbales.

Las reflexiones no pueden hacerse con figuras de material concreto: o se hacen en el cerebro o no pueden hacerse. La ayuda de espejos, láminas semitransparentes, calcado en papel transparente o de copia, etc., pueden ayudar al cerebro a interiorizar, reversar y coordinar las reflexiones pero no pueden suplantarlo. Por lo tanto, no se debe comenzar por las reflexiones para obtener las rotaciones y las traslaciones.

De esta manera se propone que se trabaje la geometría por medio de aquellas transformaciones que ayuden a esa exploración activa del espacio y a desarrollar sus representaciones en la imaginación y en el plano del dibujo.

____

11. Carlos E. Vasco, "Sistemas geométricos", en Un nuevo enfoque para la didáctica de las matemáticas, Vol. II, págs. 53 y 54.

12. Linda Dickson y otros, El aprendizaje de las matemáticas, Editorial Labor S.A., Madrid, 1991, pág. 48.

13. En la Unidad VI del Programa Curricular de 9° Grado de educación básica secundaria, publicado por el MEN en 1991, se presenta una propuesta didáctica para desarrollar con los estudiantes la representación en el plano del espacio tridimensional.

14. Carlos E. Vasco, op. cit, pág. 63.

2.4.2 Conocimientos básicos

2.4.2.3 Pensamiento métrico y sistemas de medidas

La interacción dinámica que genera el proceso de medir entre el entorno y los estudiantes, hace que éstos encuentren situaciones de utilidad y aplicaciones prácticas donde una vez más cobran sentido las matemáticas.

Actividades de la vida diaria relacionadas con las compras en el supermercado, con la cocina, con los deportes, con la lectura de mapas, con la construcción, etc., acercan a los estudiantes a la medición y les permiten desarrollar muchos conceptos y destrezas matemáticas.

La desatención de la geometría como materia de estudio en las aulas y el tratamiento de los sistemas métricos desde concepciones epistemológicas y didácticas sesgadas, descuida por un lado el desarrollo histórico de la medición y por otro reduce el proceso de medir a la mera asignación numérica.

No es extraño, en nuestro medio, introducir a los niños y a las niñas en el mundo de la medida con instrumentos refinados y complejos descuidando la construcción de la magnitud objeto de la medición y la comprensión y el desarrollo de procesos de medición cuya culminación sería precisamente aquello que hemos denunciado como prematuro.

No se les ha permitido conocer el desarrollo histórico de la medida, lo que conlleva a que no se den cuenta de la necesidad misma de medir, ni de cómo la medida surgió de una "noción de igualdad socialmente aceptada" al comparar el tamaño, la importancia, el valor, etc., en situaciones comerciales o de trueque.

Algunos investigadores afirman que los niños no tienen conciencia de las sutilezas de la noción de replicación de la unidad, es decir, la repetición de una única unidad de medida, a partir de lo cual el hombre ha llegado al número y al recuento; y que de este hecho nació la necesidad de patrones de medida fijos. Las experiencias de los niños con las medidas comienzan normalmente con el número, y están a menudo restringidas a él, con pocas posibilidades de explorar los principios en los cuales se apoya la medición.

Osborne afirma:

> (...) en las escuelas actuales, gran parte de lo que se aprende sobre medición es de naturaleza puramente incidental. Los conceptos de medida aparecen en situaciones cuyo propósito es enseñar y aprender sobre el número. Se supone que la medida es intuitiva y está lo suficientemente poseída y comprendida por los alumnos como para servir de marco intuitivo en cuyo seno explicar las operaciones aritméticas. Tal presunción ha de ser puesta en tela de juicio. Además, la naturaleza de la forma en que los niños aprenden a medir y se valen de medidas en el contexto de esta transferencia exige cuidadosa atención. (Osborne, 1976) [15].

Los procesos de medición comienzan "desde las primeras acciones con sus éxitos y fracasos codificados como más o menos, mucho o poco, grande o pequeño, en clasificaciones siempre relacionadas en alguna forma con imágenes espaciales, esto es con modelos geométricos, aún en el caso del tiempo.

Podremos hablar del segundo como actividad de metrización en el sentido estricto o restrictivo de la palabra, mientras que el sentido amplio o inclusivo de la misma se puede referir también a esas comparaciones y estimaciones llamadas cualitativas previas a la asignación numérica.

Por eso nos referimos separadamente a los sistemas geométricos, que se inician con modelos cualitativos del espacio, y a los sistemas métricos, que pretenden llegar a cuantificar numéricamente las dimensiones o magnitudes que surgen en la construcción de los modelos geométricos y en las reacciones de los objetos externos a nuestras acciones" [16].

Los logros propuestos para los sistemas métricos van encaminados a acompañar a los estudiantes a desarrollar procesos y conceptos como los siguientes:

- La construcción de los conceptos de cada magnitud.
- La comprensión de los procesos de conservación de magnitudes.
- La estimación de magnitudes y los aspectos del proceso de "capturar lo continuo con lo discreto".
- La apreciación del rango de las magnitudes.
- La selección de unidades de medida, de patrones y de instrumentos.
- La diferencia entre la unidad y el patrón de medición.
- La asignación numérica.
- El papel del trasfondo social de la medición.

A continuación haremos una breve referencia a cada uno de los procesos anteriormente mencionados.

- **La construcción de la magnitud**

Una primera actividad de quien aprende es la de crear y abstraer en el fenómeno u objeto la magnitud concreta o cantidad susceptible de medición.

Por ejemplo, si se considera una regla, dependiendo de nuestra actividad creadora, la regla puede tener espesor, o ancho, o largo o hasta diámetro. ¿Cuál sería el diámetro de una regla? Podemos decir que es la longitud del segmento de recta más largo que el cerebro puede meter dentro de la regla, que no es precisamente la diagonal de una de las caras. Así como el diámetro de la regla requirió de una actividad creadora de nuestro cerebro, ninguna de esas cantidades como largo, ancho o espesor está simplemente allí como ya dada, sin actividad humana previa.

Hay que tener en cuenta que esa construcción requiere tiempo, todo el necesario para que activamente el niño o la niña en una primera etapa cree en el objeto o en el fenómeno la magnitud concreta [17] como el largo, el ancho, el espesor, etc., o cantidad susceptible de ser medida y posteriormente logre fundir en una sola o abstraer de todas esas magnitudes concretas la magnitud abstracta, como lo sería, por ejemplo, la longitud.

El concepto de magnitud empieza a construirse cuando se sabe que hay algo que es más o menos que otra cosa y se pregunta: más qué o más de qué. Puede darse una etapa intermedia de construcción de magnitudes que después se puedan fundir en una sola, como se ha señalado para la longitud, con las magnitudes intermedias de largo, ancho, espesor, altura, profundidad, etcétera.

Todas ellas se conforman por un proceso relacional activo, que a diferencia de lo que se cree comúnmente, no se basa en una equivalencia, como la equi-longitud, o la equi-arealidad, o la equi-masa.

Más bien se nota que primero se logra la comparación en la dirección de menor a mayor, es decir la relación de ser más grande, que es anterior a la de ser más pequeño que, etc. Una vez consolidada esa relación unidireccional se reversibiliza la relación para construir la inversa, y se coordinan ambas. Sólo cuando fracasan los intentos de someter los objetos y fenómenos a esas relaciones de desigualdad se contruye la equivalencia respectiva.

- **El desarrollo del proceso de conservación**

Es especialmente importante sobre todo para quienes inician el ciclo de la educación básica primaria, ya que la captación de aquello que permanece invariante a pesar de las alteraciones de tiempo y espacio, es imprescindible en la consolidación de los conceptos de longitud, área, volumen, peso, tiempo, etc.

En estudios acerca de la conservación de la longitud realizados por Musick (1978) en 142 niños de edades comprendidas entre los tres años y medio y los nueve años, encontró que dada una distancia entre dos sitios A y B que se encontraban en lados opuestos de una sala, los comentarios de los niños al juzgar las distancias de ida (A B) y vuelta (B A) en condiciones diferentes fueron de este tipo:

- Es más lejos ir a un sitio que volver.
- Fui más lejos cuando corrí porque eso es más rápido que saltar.
- Llevar el cesto hizo que el camino fuera más largo.
- Las carreras son siempre más lejos que los saltos, porque a saltos es más despacio y se tarda más tiempo.
- Es la misma distancia cuando la anda la muñeca o cuando la ando yo, pero no es la misma distancia al correrla o saltarla.
- Mira, no importa lo que hagas, la habitación es igual de grande. Siempre es el mismo espacio.

Con base en sus hallazgos Musick asevera que es preciso tomar precauciones al recurrir a tareas motoras que puedan distraer al niño o a la niña y obstaculizar su capacidad de asir el concepto y su estructura subyacente.

Es bien conocido el test clásico de conservación de longitud de Piaget (1969), que consiste en presentar dos varillas de la misma longitud, de esta manera

y luego así

En el segundo caso los niños juzgan que ya no tienen la misma longitud porque los extremos no están alineados.

La mayoría de estudios de este tipo han llevado a la conclusión de que los niños entre los seis y los ocho años de edad exhiben conservación de longitudes a pesar de los desplazamientos de las varillas.

Un ejemplo para la conservación de masa consiste en transformar una varita de plastilina en una barrita, y uno para la conservación de volumen es transvasar una cantidad de líquido de un recipiente pando a otro alto.

En ambos casos los niños consideran que en el segundo estado hay más plastilina y más agua respectivamente

- **La estimación de magnitudes** y los aspectos del proceso de “capturar lo continuo con lo discreto” están íntimamente relacionados con los conceptos de medida y conteo.

A propósito de esta relación

> “Brookes (1970) adopta un planteamiento histórico , considerando que la base de todo proceso de medida es la reiteración de una unidad (...)
>
> Sin embargo, los conceptos numéricos asociados al proceso de medida suponen más que el mero contar en sentido ordinario. (...) puede suceder que en el proceso de medida las propias unidades sean indistiguibles unas de otras. De ordinario, el recuento se ocupa de las llamadas variables discretas, es decir, se aplica a situaciones en las que cada una de las unidades individuales que hay que contar es una entidad distinta y separable, con asignación de un número a un conjunto. (...)
>
> Supongamos, sin embargo, que se pretende dividir una torta física y real en cuatro porciones iguales,

> ¿cómo medir la cuarta parte de una torta?. (...) en este caso cada unidad de volumen o área no es individualmente distinguible, como lo era cuando la situación sólo requería contar. Por lo tanto tal medición sólo puede tener precisión aproximativa, y cuanto más refinado y perfecto es el instrumento de medida, tanto más podremos acercarnos a la exactitud. (...) ¿ Cuánto hay?, es en este caso una pregunta muy distinta de ¿cuántos hay?
>
> Siempre que al medir podamos refinar la medida indefinidamente tomando unidades más y más pequeñas estaremos ocupándonos de una variable continua”[18].

Aunque las magnitudes que nos ocupan son de naturaleza continua, en los primeros ensayos tendientes a encontrar una estimación de sus medidas, la repetición reiterada de patrones susceptibles de ser contados mediante los números naturales parece ocultar el carácter continuo de dichas magnitudes. Podríamos decir que, en este caso, hay un esfuerzo por capturar lo continuo (magnitudes) con lo discreto (números naturales).

> Para los niños las unidades de medida son antropocéntricas, y se relacionan con acciones más que con patrones; aparentemente el patrón es el paso, el pie, o la cuarta; pero en realidad es dar el paso, poner el pie o extender la cuarta.
>
> Esa repetición de acciones se deja controlar por los números de contar o números naturales. Sólo el fracaso de tratar de capturar lo continuo con esas acciones repetidas que se pueden enumerar como discretas, fracaso que se debe a que “sobre” o “falte” algo, lleva a reequilibrar el sistema de medición respectivo con la introducción de los fraccionarios (...), y su evolución hasta la coordinación de los continuos de la acción con los continuos operatorios generados por el cerebro humano: los de los números reales [19].

Cuando se trata del área de superficies, es usual “cuadricular” la representación de éstas y preguntar, por ejemplo, ¿con cuántas baldosas se recubre el piso? La unidad patrón es la baldosa, y el número de ellas es una medida del área de dicha superficie.

Estas actividades conllevan a la noción de recubrimiento por repetición de una unidad y son previas para el proceso de medición del área. Sin embargo es necesario realizar otro tipo de actividades que permitan captar la naturaleza continua y aproximativa de la medida ya que las anteriores tienen la desventaja de promover un carácter discreto y exacto de la medida lo cual no es sino una primera aproximación, que si no se supera oportunamente, obstaculiza el desarrollo interior de los procesos de medición.

Para avanzar en los procesos de medición es importante desarrollar la estimación aproximada de las longitudes/distancias, áreas, volúmenes/capacidades, duraciones, pesos/masas, amplitudes angulares, temperaturas, etc.

Bright (1976) define la estimación de magnitudes como “el proceso de llegar a una medida sin la ayuda de instrumentos de medición. Es un proceso mental, aunque frecuentemente hay aspectos visuales y manipulativos en él” [20].

- **La apreciación del rango de las magnitudes** y la selección de unidades, son habilidades poco desarrolladas en los niños y aún en las personas adultas debido al tratamiento libresco y descontextualizado que se le da a la medición dentro de las matemáticas escolares.

Antes de seleccionar una unidad o un patrón de medida es necesario hacer una estimación perceptual del rango en que se halla una magnitud concreta, por ejemplo, la altura de una puerta, la longitud de un camino, el peso de un objeto, la duración de un evento, etc. Esta primera reflexión está estrechamente ligada al significado y a la familiaridad que tengan las personas con las unidades de medida y con cierta información que “podríamos llamar postes de guía o ejemplos paradigmáticos de procesos y objetos conocidos en los cuales el aspecto seleccionado por la magnitud tenga un valor fácil de recordar (...), colocar los postes de guía es almacenar información como que un jet viaja a 800 km/h, un carro entre 40 y 80 km/h en carretera (...), que una persona puede recorrer hasta 36 km/h, pues el récord de cien metros planos puede recorrer 100 m en 10 segundos, o sea 10 m/s” [21].

“Rango es una franja más amplia que orden de magnitud; por ejemplo, la longitud de la carretera de Bogotá a Tunja estaría en el mismo rango que la de la distancia del extremo norte de La Guajira a Leticia, rango en el que son útiles los kilómetros, pero en distinto orden de magnitud: una distancia es del orden de los centenares, y la otra del orden de los miles de kilómetros” [22].

- **La selección de unidades**

No es necesario seleccionar unidades en un proceso de medición. Éste puede terminar con la ubicación de la cantidad respectiva en un rango de magnitudes, y en la afirmación o negación de una comparación con una instancia conocida de la misma magnitud, no necesariamente con la unidad.

Pero si se requiere refinar el resultado de la medición, es necesario seleccionar una unidad de medida apropiada para el rango ya determinado. Tiene que ser la cantidad o instancia de la magnitud que pueda identificarse lo suficientemente bien para poder utilizarla en combinación con un sistema numérico ya previamente construido.

Pero no puede saltarse de inmediato de un objeto o fenómeno que "posea", o mejor, al que se le pueda atribuir esa instancia de la magnitud, a lo que es la unidad misma. Aun el lenguaje nos ayuda a percibir que no es lo mismo un cuadrado "de" un centímetro de lado, que "un" centímetro cuadrado, que "el" centímetro cuadrado como unidad de área.

Hay una diferencia importante entre la unidad y el patrón de medida. Los libros que dicen que un centímetro cuadrado es un cuadrito de un centímetro de lado, estarían excluyendo que un disco también pueda tener un centímetro cuadrado de área, o que una región del plano se pueda subdividir en triángulos equiláteros de un centímetro cuadrado de área. El patrón es más concreto, la unidad es más abstracta. El patrón debe tener en lo posible una unidad de área. Pero la unidad no tiene por qué estar ligada a un patrón determinado. La influencia de la longitud y del antiguo metro-patrón de París sirven como obstáculos epistemológicos para una conceptualización más completa del proceso de medición.

Los patrones son inicialmente antropocéntricos y no estandarizados. Sólo el desequilibrio producido por dos mediciones con patrones corporales que produzcan el mismo número, pero en las que la cantidad sea perceptiblemente diferente, llevan a captar la necesidad de la fijación convencional de patrones estandarizados. Piénsese por ejemplo en un juego de fútbol en el que el profesor proponga que para medir la distancia entre los postes del arco se utilice el pie de uno de los niños en el arco de su equipo, y el del profesor en el arco del equipo contrario. Los resultados llevarán a los mismos alumnos a proponer la fijación de un pie estándar.

La estimación de medidas ayuda a los niños no sólo a reforzar la comprensión de los atributos y el proceso de medición sino a que adquieran conciencia del tamaño de las unidades.

Llegamos a lo que usualmente se considera como lo más importante de la medición: la asignación numérica. Éste es apenas el último subproceso de un complejo proceso de medición, y uno al que no necesariamente hay que llegar para que se pueda decir que sí hubo medición.

Este proceso de asignación numérica tiene intrínsecamente una incertidumbre, una inexactitud incorporada. La abstracción de la magnitud concreta y de la magnitud abstracta provienen de comparaciones, y la igualdad -de- magnitud, o equivalencia con respecto a la magnitud, es una relación derivada de la desigualdad o inequivalencia, precisamente cuando falla la ordenación por mayor y menor. Y el fracaso de esa ordenación depende de la precisión del aparato o calibrador respectivo (así sea un órgano de nuestro cuerpo como el pulgar y el índice; de todas maneras la última instancia de cualquier calibrador es un órgano de nuestro cuerpo, generalmente el ojo), y depende además de la habilidad en su utilización.

Una vez que se tiene fijado el contexto, la magnitud física abstracta, la cantidad o instancia concreta de la magnitud, y la unidad de medida, hay todavía que fijar un proceso de medición más o menos indirecto. Piénsese por ejemplo en este acertijo. Tengo una regla graduada en centímetros y milímetros. Quiero medir el espesor de esta hoja de papel. ¿Cuál sería el proceso de medición apropiado? Ciertamente no es comparar la hoja de papel con las rayitas de centímetro o milímetro.

Por ahora, lo importante es comprender que aun con todos estos requisitos, todavía es necesario fijar un proceso de medición antes de tener la posibilidad de hacer una asignación numérica. Más aún, es importante saber que distintos procesos de medición pueden llevar a asignar válidamente números distintos a la misma magnitud concreta del mismo objeto concreto. El análisis de esos distintos resultados de procesos diferentes ha hecho progresar mucho nuestro conocimiento sobre la naturaleza, y sobre los procesos mismos de medición"[23].

El auténtico proceso de medida lleva consigo cierta "sensibilidad" a la situación, cierta noción de su tamaño. El proceso exige decidir qué grado de precisión se requiere, y consiguientemente, lo pequeña que ha de ser la unidad de medida y el refinamiento del instrumento de medida, es decir, los juicios sobre estimación, aproximación, etc., no llegan nunca a tomar cuerpo a nivel de clase, porque en ella , lo que preocupa y prima del proceso de medida son los aspectos numéricos y de recuento" [24].

- **El trasfondo social de la medición**

La interacción social y la referencia a un trasfondo significativo e importante para el alumno son absolutamente insustituibles en la construcción de los procesos de la medición en el cerebro de cada uno de los participantes.

¿Cuántas veces hemos tenido que volver a mirar el valor numérico de un año luz, o un barril, o una milla marina?, pues como no somos ni astrónomos, ni petroleros, ni marineros, estas medidas no tienen significado para nosotros. No vale la pena gastarle tiempo a aprenderlas, sino sólo a saber en dónde buscarlas y a quién preguntarle sobre ellas.

Es suficiente saber manejar las conversiones de unidades y las operaciones en unos cuantos contextos diferentes en donde uno domine el trasfondo social y tenga interés en obtener resultados correctos, especialmente cuando se corre un riesgo real si uno se guía por un resultado equivocado.

Es de anotar que antes de la selección de la unidad y la ejecución del proceso particular de asignación numérica, los objetos o procesos ya vistos selectivamente desde el punto de vista de la magnitud, así sea sólo a escala ordinal, pueden considerarse como instancias concretas de la magnitud respectiva, que llamamos "cantidades". Como lo vimos en el caso de las magnitudes discretas, podemos hablar de "una gran cantidad de lápices", aún antes de saber cuántos son. Que después resulten ser ciento cuarenta y cuatro o doce docenas, o una gruesa eso es ya una etapa posterior, en la que esa cantidad ya ha sido objeto de un nuevo proceso de asignación numérica, altamente dependiente de la selección de unidad, del proceso de medición, y de todo el trasfondo social en el que ocurre el proceso.

Este último aspecto determina por ejemplo si se detiene el proceso apenas se termine la etapa ordinal ("en este montón de lápices hay más que en este otro"); o que se interrumpa en una etapa estimativa intermedia ("hay unos cien o doscientos"; ("hay por ahí una gruesa"), o si se refina hasta el número más preciso que pueda lograrse en el tiempo disponible y con el material específico de que se trata (piense en contar, en vez de cien o doscientos lápices, cien o doscientas docenas de lápices, o para cambiar de material, cien o doscientas viboritas en un serpentario).

Esta presencia invisible del trasfondo social, lingüístico y utilitario de los procesos de medición debe tenerse muy en cuenta, así como la importancia del proceso inicial de estimación ordinal, pre-numérica o cualitativa, que es crucial aun para seleccionar la unidad y el proceso de medición apropiados a la situación.

Los procesos hasta aquí comentados son los más relevantes del proceso total de medición de cualquier magnitud. La relación didáctica que los docentes establezcan con ellos al momento de preparar sus clases conllevará la adecuada selección de los materiales de manera que faciliten la abstracción de la magnitud que se pretende estudiar y el desarrollo de los procesos aquí tratados.

Los procesos de medición comienzan "desde las primeras acciones con sus éxitos y fracasos codificados como más o menos, mucho o poco, grande o pequeño, en clasificaciones siempre relacionadas en alguna forma con imágenes espaciales, esto es con modelos geométricos, aún en el caso del tiempo.

____

15. Linda Dickson, op. cit., pág. 89.

16. Carlos E. Vasco, El constructivismo genético, Bogotá, Universidad Nacional (en prensa).

17. El doctor Federici llama "magnitud con minúscula" o "magnitud concreta" a la cantidad o instancia de la magnitud física respectiva, que es la "magnitud con mayúscula" o "magnitud abstracta".

18. Linda Dickson, op.cit.

19. Carlos E. Vasco, Aspectos cualitativos de la medición en ciencias naturales, pág. 2.

20. D. A. Grouws, Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, New York, Macmillan, 1992, pág. 382.

21. Carlos E. Vasco U., op. cit.

22. Carlos E. Vasco U., op. cit., pág. 187.

23. Carlos E. Vasco, op. cit.

24. Linda Dickson, op. cit., pág. 103.

2.4.2 Conocimientos básicos

2.4.2.4 El pensamiento aleatorio y los sistemas de datos

Una tendencia actual en los currículos de matemáticas es la de favorecer el desarrollo del pensamiento aleatorio, el cual ha estado presente a lo largo de este siglo, en la ciencia, en la cultura y aún en la forma de pensar cotidiana. La teoría de la probabilidad y su aplicación a los fenómenos aleatorios, han construido un andamiaje matemático que de alguna manera logra dominar y manejar acertadamente la incertidumbre. Fenómenos que en un comienzo parecen caóticos, regidos por el azar, son ordenados por la estadística mediante leyes aleatorias de una manera semejante a como actúan las leyes determinísticas sobre otros fenómenos de las ciencias. Los dominios de la estadística han favorecido el tratamiento de la incertidumbre en ciencias como la biología, la medicina, la economía, la psicología, la antropología, la lingüística..., y aún más, han permitido desarrollos al interior de la misma matemática.

Las investigaciones de Shanghnessy (1985) le han llevado a establecer que en las matemáticas escolares el desarrollo del pensamiento aleatorio,mediante contenidos de la probabilidad y la estadística debe estar imbuido de un espíritu de exploración y de investigación tanto por parte de los estudiantes como de los docentes. Debe integrar la construcción de modelos de fenómenos físicos y del desarrollo de estrategias como las de simulación de experimentos y de conteos. También han de estar presentes la comparación y evaluación de diferentes formas de aproximación a los problemas con el objeto de monitorear posibles concepciones y representaciones erradas. De esta manera el desarrollo del pensamiento aleatorio significa resolución de problemas.

La búsqueda de respuestas a preguntas que sobre el mundo físico se hacen los niños resulta ser una actividad rica y llena de sentido si se hace a través de recolección y análisis de datos. Decidir la pertinencia de la información necesaria, la forma de recogerla, de representarla y de interpretarla para obtener las respuestas lleva a nuevas hipótesis y a exploraciones muy enriquecedoras para los estudiantes. Estas actividades permiten además encontrar relaciones con otras áreas del currículo y poner en práctica conocimientos sobre los números, las mediciones, la estimación y estrategias de resolución de problemas.

En la tarea de buscar y recoger datos es importante mantener claros los objetivos, las actitudes, los intereses que la indujeron, prever qué tipos de respuestas se pueden encontrar, las dificultades que podrían presentarse, las distintas fuentes como consultas, entrevistas, encuestas, observaciones, la evaluación de su veracidad, distorsiones, sesgos, lagunas, omisiones y la evaluación de la actitud ética de quien recoge los datos y su responsabilidad social [25].

Cuando se habla de datos, es importante una reflexión sobre su naturaleza. Ellos no serían comprensibles sin considerar que tienen un mínimo de estructura, el formato y seguramente un orden, por ejemplo el estar unos a continuación de otros, el orden alfabético si son palabras, el orden aditivo si se trata de números. En este sentido podría considerarse que no hay datos sino sistemas de datos.

La enseñanza de las matemáticas convencionales ha enfatizado la búsqueda de la respuesta correcta única y los métodos deductivos. La introducción de la estadística y la probabilidad en el currículo de matemáticas crea la necesidad de un mayor uso del pensamiento inductivo al permitir, sobre un conjunto de datos, proponer diferentes inferencias, las cuales a su vez van a tener diferentes posibilidades de ser ciertas. Este carácter no determinista de la probabilidad hace necesario que su enseñanza se aborde en contextos significativos, en donde la presencia de problemas abiertos con cierta carga de indeterminación permitan exponer argumentos estadísticos, encontrar diferentes interpretaciones y tomar decisiones. "Explorar e interpretar los datos, relacionarlos con otros, conjeturar, buscar configuraciones cualitativas, tendencias, oscilaciones, tipos de crecimiento, buscar correlaciones, distinguir correlación de causalidad, calcular correlaciones y su significación, hacer inferencias cualitativas, diseños, pruebas de hipótesis, reinterpretar los datos, criticarlos, leer entre líneas, hacer simulaciones, saber que hay riesgos en las decisiones basadas en inferencias"[26] son logros importantes en el aprendizaje de la estadística.

Entonces habrá de tenerse especial cuidado para que la enseñanza de conceptos, de métodos, de representaciones del mundo estadístico y probabilístico como camino hacia la construcción de una teoría matemática no cause la pérdida de su carácter aleatorio.

Heinz Steinbring, en su artículo "La interacción entre la práctica de la enseñanza y las concepciones teóricas", presenta un modelo basado en un análisis epistemológico de la naturaleza de la probabilidad, el cual considera tres niveles. El primero tiene que ver con la estructura del contenido, el segundo tiene en cuenta el estudiante que aprende significativamente y el tercero considera al docente quien planifica, organiza, apoya y desarrolla esta forma de aprendizaje. La figura muestra cómo se interrelacionan estos tres niveles.

En el análisis hecho por el autor, la relación entre los dos primeros niveles considerados en el modelo trata de responder a dos preguntas centrales: "¿Cómo es posible introducir los conceptos de aleatoriedad y de indeterminación y utilizarlos con ayuda de conceptos matemáticos de naturaleza determinante?, ¿Cómo pueden hacerse predicciones relativas a situaciones inciertas y aletorias bajo forma de proposiciones matemáticas y cuál es el carácter específico de estas predicciones?"

Así por ejemplo las proporciones estadísticas como frecuencias relativas, probabilidades, valores esperados, valores medios, entre otras, se dan mediante definiciones formales, reglas de cálculo o funciones matemáticas, pero estos valores exactamente calculados solos no reflejan la naturaleza específica de la aleatoriedad, para ello es necesario un marco de significación que haga posible la comprensión del carácter aleatorio de esos valores, tales como aplicaciones concretas en situaciones de la vida real, encuestas estadísticas. En los cursos de la educación básica las representaciones gráficas como las circulares, histogramas, diagramas de árbol son marcos matemáticos que permiten captar la aleatoriedad y la incertidumbre tanto en forma cuantitativa como cualitativa, sobre los cuales los estudiantes pueden hacer evaluaciones y tomar decisiones, sin recurrir a un esquema único de cálculo que los llevaría a encontrar valores deterministas definidos.

El proyecto del Consejo Escolar de Educación Estadística [27] presenta tres principios que pueden tenerse en cuenta al introducir los conceptos:

- Los conceptos y las técnicas deben introducirse dentro de un contexto práctico.
- No es necesario desarrollar completamente las técnicas en el momento en que se presentan por primera vez.
- No es necesario ni deseable una justificación teórica completa de todos los temas, algunos de ellos se tratarán dentro de un problema particular, otros se considerarán mediante experiencias y no se justificarán teóricamente.

Los docentes, además de considerar situaciones de aplicación reales para introducir los conceptos aleatorios, deben preparar y utilizar situaciones de enseñanza abiertas, orientadas hacia proyectos y experiencias en el marco aleatorio y estadístico, susceptibles de cambios y de resultados inesperados e imprevisibles. Los proyectos y experiencias estadísticos que resultan interesantes y motivadores para los estudiantes generalmente consideran temas externos a las matemáticas lo cual favorece procesos interdisciplinarios de gran riqueza.

Estas reflexiones acerca de los procesos que se desarrollan mediante contenidos matemáticos que tienen que ver con el pensamiento aleatorio se tuvieron en cuenta al proponer indicadores de logros curriculares para el área de matemáticas, en la resolución 2343 de 1996.

____

[25.] Carlos E. Vasco, "Sistemas de datos". Documento (en prensa).

[26.] Ibídem.

[27.] P. Holmes, Teaching Statiatics 11-16, Slough, Foulshans Educational, 1980.

2.4.2 Conocimientos básicos

2.4.2.5 Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos

Proponer el inicio y desarrollo del pensamiento variacional como uno de los logros para alcanzar en la educación básica, presupone superar la enseñanza de contenidos matemáticos fragmentados y compartimentalizados, para ubicarse en el dominio de un campo conceptual, que involucra conceptos y procedimientos interestructurados y vinculados que permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad práctica del hombre, como de las ciencias y las propiamente matemáticas donde la variación se encuentre como sustrato de ellas.

En esta forma se amplía la visión de la variación, por cuanto su estudio se inicia en el intento de cuantificar la variación por medio de las cantidades y las magnitudes.

Una rápida visión a la evolución histórica, desde las matemáticas, del estudio de la variación permite afirmar que ésta se inicia con las tablas babilónicas, con las gráficas de variación (Oresme en la Edad Media) y con las fórmulas algebraicas de origen renacentista. Particularmente, el contexto de la variación proporcional para modelar las situaciones de variación cobra especial relevancia por ser la única teoría matemática con la que se contaba en la Edad Media. Pero es en el contexto del estudio matemático del movimiento donde se alcanza la construcción matemática de la variación, lo que configura el Cálculo.

Esta breve e incompleta presentación histórica de la variación, hace necesario desmenuzar los conceptos, procedimientos y métodos que involucra la variación para poner al descubierto las interpelaciones entre ellos. Un primer acercamiento en la búsqueda de las interrelaciones permite identificar algunos de los núcleos conceptuales matemáticos en los que está involucrada la variación:

- Continuo numérico, reales, en su interior los procesos infinitos, su tendencia, aproximaciones sucesivas, divisibilidad;

- la función como dependencia y modelos de función;
- las magnitudes;
- el álgebra en su sentido simbólico, liberada de su significación geométrica, particularmente la noción y significado de la variable es determinante en este campo;
- modelos matemáticos de tipos de variación: aditiva, multiplicativa, variación para medir el cambio absoluto y para medir el cambio relativo. La proporcionalidad cobra especial significado.

En los contextos de la vida práctica y en los científicos, la variación se encuentra en contextos de dependencia entre variables o en contextos donde una misma cantidad varía (conocida como medición de la variación absoluta o relativa). Estos conceptos promueven en el estudiante actitudes de observación, registro y utilización del lenguaje matemático.

Abordado así el desarrollo del pensamiento variacional se asume por principio que las estructuras conceptuales se desarrollan en el tiempo, que su aprendizaje es un proceso que se madura progresivamente para hacerse más sofisticado, y que nuevas situaciones problemáticas exigirán reconsiderar lo aprendido para aproximarse a las conceptualizaciones propias de las matemáticas.

Entre los diferentes sistemas de representación asociados a la variación se encuentran los enunciados verbales, las representaciones tabulares, las gráficas de tipo cartesiano o sagital, las representaciones pictóricas e icónicas, la instruccional (programación), la mecánica (molinos), las fórmulas y las expresiones analíticas.

El estudio de la variación puede ser iniciado pronto en el currículo de matemáticas. El significado y sentido acerca de la variación puede establecerse a partir de las situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de cambio y variación de la vida práctica. La organización de la variación en tablas, puede usarse para iniciar en los estudiantes el desarrollo del pensamiento variacional por cuanto la solución de tareas que involucren procesos aritméticos, inicia también la comprensión de la variable y de las fórmulas. En estos problemas los números usados deben ser controlados y los procesos aritméticos también se deben ajustar a la aritmética que se estudia. Igualmente, la aproximación numérica y la estimación deben ser argumentos usados en la solución de los problemas. La calculadora numérica se convierte en una herramienta necesaria en la iniciación del estudio de la variación.

Adicionalmente la tabla se constituye en un elemento para iniciar el estudio de la función, pues es un ejemplo concreto de función presentada numéricamente. Y aunque en algunas ocasiones enfatiza la variación numérica discreta, es necesario ir construyendo la variación numérica continua. Así mismo, las situaciones problemáticas deben seleccionarse para enfrentar a los estudiantes con la construcción de expresiones algebraicas o con la construcción de las fórmulas. Tal como lo señala Demana (1990) la exposición repetida de construcciones de fórmulas, como expresiones que explicitan un patrón de variación, ayuda a los estudiantes a comprender la sintaxis de las expresiones algebraicas que aparecerán después del estudio del álgebra. La tabla también se constituye en una herramienta necesaria para la comprensión de la variable, pues el uso de filas con variables ayuda a que el estudiante comprenda que una variable puede tener un número infinito de valores de reemplazo. Además, el uso de variables en la tabla también ayuda a la escritura de las expresiones algebraicas, tipo retórico o fórmulas para describir la variación o el cambio.

Otra herramienta necesaria para iniciar el estudio de la variación desde la primaria la constituye el estudio de los patrones. Éstos incluyen escenarios en la vida práctica como fotografías y representaciones pictóricas e icónicas. En las matemáticas los escenarios geométricos o numéricos también deben ser utilizados para reconocer y describir regularidades o patrones presentes en las transformaciones. Estas exploraciones permiten, en una primera instancia, hacer una descripción verbal de la relación que existe entre las cantidades (el argumento y el producto terminado que se lee primero) que intervienen en la transformación. Los contextos de variación deben incluir patrones aditivos y multiplicativos.

Las tablas se pueden usar posteriormente para llevar a los estudiantes a la graficación de situaciones problema de tipo concreto, aunque quede restringida al primer cuadrante. La identificación de la variable independiente y dependiente es más significativa cuando se inicia desde la representación de situaciones concretas. Más adelante se formaliza el sistema cartesiano con el aprendizaje de su sintaxis.

Por su parte, las gráficas cartesianas también pueden ser introducidas tempranamente en el currículo. Ellas hacen posible el estudio dinámico de la variación. La relación explícita entre las variables que determinan una gráfica puede ser iniciada con situaciones de variación cualitativa y con la identificación de nombres para los ejes coordenados.

Los contextos de la variación proporcional integran el estudio y comprensión de variables intensivas con dimensión, así como también ayudan al estudiante a comprender el razonamiento multiplicativo.

Particularmente la gráfica tiene como fin abordar los aspectos de la dependencia entre variables, gestando la noción de función como dependencia.

Los contextos donde aparece la noción de función establecen relaciones funcionales entre los mundos que cambian, de esta manera emerge la función como herramienta de conocimiento necesaria para “enlazar” patrones de variación entre variables y para predecir y controlar el cambio. Los modelos más simples de función (lineal, afín, cuadrática, exponencial...) encapsulan modelos de variación como la proporcionalidad.

La introducción de la función en los contextos descritos preparan al estudiante para comprender la naturaleza arbitraria de los conjuntos en que se le define, así como a la relación establecida entre elllos. Es necesario enfrentar a los estudiantes a situaciones donde la función no exhiba una regularidad, con el fin de alejar la idea de que su existencia o definición está determinada por la existencia de la expresión algebraica. A la conceptualización de la función y los objetos asociados (dominio, rango...) le prosigue el estudio de los modelos elementales, lineal, afín, cuadrático, exponencial, priorizando en éstos el estudio de los patrones que los caracterizan (crecientes, decrecientes). La calculadora gráfica se constituye en una herramienta didáctica necesaria para lograr este propósito.

En lo referente a la construcción del continuo numérico, los escenarios deben ser los numéricos y los geométricos. Particularmente el trabajo con las representaciones decimales, cobra especial relevancia. Los procesos infinitos deben ser introducidos en contextos geométricos.

Una propuesta didáctica para el tratamiento de las funciones está desarrollada en los Programas de la Renovación Curricular.

> El estudio de la variación puede ser iniciado pronto en el currículo de matemáticas. El significado y sentido acerca de la variación puede establecerse a partir de las situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de cambio y variación de la vida práctica.

2.4 Hacia una estructura curricular

2.4.3 Procesos generales

Sin obedecer a una clasificación excluyente los procesos presentes en toda la actividad matemática tienen que ver con:

- La resolución y el planteamiento de problemas
- El razonamiento
- La comunicación
- La modelación
- La elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.

2.4.3 Procesos generales

2.4.3.1 La resolución y el planteamiento de problemas

La actividad de resolver problemas ha sido considerada como un elemento importante en el desarrollo de las matemáticas y en el estudio del conocimiento matemático.

En diferentes propuestas curriculares recientes se afirma que la resolución de problemas debe ser eje central del currículo de matemáticas, y como tal, debe ser un objetivo primario de la enseñanza y parte integral de la actividad matemática. Pero esto no significa que se constituya en un tópico aparte del currículo, deberá permearlo en su totalidad y proveer un contexto en el cual los conceptos y herramientas sean aprendidos.

En la medida en que los estudiantes van resolviendo problemas van ganando confianza en el uso de las matemáticas, van desarrollando una mente inquisitiva y perseverante, van aumentando su capacidad de comunicarse matemáticamente y su capacidad para utilizar procesos de pensamiento de más alto nivel.

Las investigaciones que han reconocido la resolución de problemas como una actividad muy importante para aprender matemáticas, proponen considerar en el currículo escolar de matemáticas aspectos como los siguientes:

- Formulación de problemas a partir de situaciones dentro y fuera de las matemáticas.
- Desarrollo y aplicación de diversas estrategias para resolver problemas.
- Verificación e interpretación de resultados a la luz del problema original.
- Generalización de soluciones y estrategias para nuevas situaciones de problemas.
- Adquisición de confianza en el uso significativo de las matemáticas (NCTM, 1989: 71).

El reconocimiento que se le ha dado a la actividad de resolver problemas en el desarrollo de las matemáticas ha originado algunas propuestas sobre su enseñanza, entre las cuales las más conocidas son las de los investigadores Polya y Alan Schoenfeld [28].

Para Polya "resolver un problema es encontrar un camino allí donde no se conocía previamente camino alguno, encontrar la forma de salir de una dificultad, encontrar la forma de sortear un obstáculo, conseguir el fin deseado, que no es conseguible de forma inmediata, utilizando los medios adecuados".

Polya describió las siguientes cuatro fases para resolver problemas:

- Comprensión del problema
- Concepción de un plan
- Ejecución del plan
- Visión retrospectiva

Para cada fase sugiere una serie de preguntas que el estudiante se puede hacer, o de aspectos que debe considerar para avanzar en la resolución del problema, para utilizar el razonamiento heurístico, el cual se considera como las estrategias para avanzar en problemas desconocidos y no usuales, como dibujar figuras, introducir una notación adecuada, aprovechar problemas relacionados, explorar analogías, trabajar con problemas auxiliares, reformular el problema, introducir elementos auxiliares en un problema, generalizar, especializar, variar el problema, trabajar hacia atrás.

Aunque los matemáticos reconocen en los trabajos de Polya actividades que ellos mismos realizan al resolver problemas, también plantean que las estrategias de pensamiento heurístico resultan demasiado abstractas y generales para el estudiante.

Alan Schoenfeld reconoce el potencial de las estrategias discutidas por Polya, pero dice que los estudiantes no las usan.

Su trabajo juega un papel importante en la implementación de las actividades relacionadas con el proceso de resolver problemas en el aprendizaje de las matemáticas y se fundamenta en las siguientes ideas:

- En el salón de clase hay que propiciar a los estudiantes condiciones similares a las condiciones que los matemáticos experimentan en el proceso de desarrollo de las matemáticas. Schoenfeld mencionó que los estudiantes necesitan aprender matemáticas en un salón de clase que represente un microcosmo de la cultura matemática, esto es, clases en donde los valores de las matemáticas como una disciplina con sentido sean reflejadas en la práctica cotidiana.

- Para entender cómo los estudiantes intentan resolver problemas y consecuentemente para proponer actividades que puedan ayudarlos es necesario discutir problemas en diferentes contextos y considerar que en el proceso de resolver problemas influyen los siguientes factores:

  – **El dominio del conocimiento**, que son los recursos matemáticos con los que cuenta el estudiante y que pueden ser utilizados en el problema como intuiciones, definiciones, conocimiento informal del tema, hechos, procedimientos y concepción sobre las reglas para trabajar en el dominio.

  – **Estrategias cognoscitivas** que incluyen métodos heurísticos como descomponer el problema en simples casos, establecer metas relacionadas, invertir el problema, dibujar diagramas, el uso de material manipulable, el ensayo y el error, el uso de tablas y listas ordenadas, la búsqueda de patrones y la reconstrucción del problema.

  – **Estrategias metacognitivas** se relacionan con el monitoreo y el control. Están las decisiones globales con respecto a la selección e implementación de recursos y estrategias, acciones tales como planear, evaluar y decidir.

  – **El sistema de creencias** se compone de la visión que se tenga de las matemáticas y de sí mismo. Las creencias determinan la manera como se aproxima una persona al problema, las técnicas que usa o evita, el tiempo y el esfuerzo que le dedica, entre otras.

Las creencias establecen el marco dentro del cual se utilizan los recursos, las estrategias cognitivas y las metacognitivas (Santos, Luz Manuel, 1992: 22).

La formulación y solución de problemas permite alcanzar metas significativas en el proceso de construcción del conocimiento matemático. Citemos algunas:

- Desarrollar habilidad para comunicarse matemáticamente: expresar ideas, interpretar y evaluar, representar, usar consistentemente los diferentes tipos de lenguaje, describir relaciones y modelar situaciones cotidianas.

- Provocar procesos de investigación que subyacen al razonamiento matemático; nos estamos refiriendo precisamente a los procesos del pensamiento matemático: la manipulación (exploración de ejemplos, casos particulares); la formulación de conjeturas (núcleo del razonamiento matemático, proponer sistemáticamente afirmaciones que parecen ser razonables, someterlas a prueba y estructurar argumentos sobre su validez); la generalización (descubrir una ley y reflexionar sistemáticamente sobre ella); la argumentación (explicar el porqué, estructurar argumentos para sustentar generalización, someter a prueba, explorar nuevos caminos).

- Investigar comprensión de conceptos y de procesos matemáticos a través de: reconocimiento de ejemplos y contraejemplos; uso de diversidad de modelos, diagramas, símbolos para representarlos, traducción entre distintas formas de representación; identificación de propiedades y el reconocimiento de condiciones, ejecución eficiente de procesos, verificación de resultados de un proceso, justificación de pasos de un proceso, reconocimiento de procesos correctos e incorrectos, generación de nuevos procesos, etcétera.

- Investigar estrategias diversas, explorar caminos alternos y flexibilizar la exploración de ideas matemáticas.

  Para lograr estas metas los estudiantes tienen que discutir sus ideas, negociar, especular sobre los posibles ejemplos y contraejemplos que ayuden a confirmar o desaprobar sus ideas.

Para terminar, es preciso aclarar que los trabajos sobre resolución de problemas se consideran bajo dos perspectivas. Una es la de solución de problemas como una interacción con situaciones problemáticas con fines pedagógicos, o sea como estrategia didáctica, a la cual se hizo referencia anteriormente en la sección “Las situaciones problemáticas...”. Otra es la capacidad de resolución de problemas como objetivo general del área, o sea como logro fundamental de toda la educación básica y media, a la cual nos estamos refiriendo en esta sección. Son dos perspectivas que no se pueden confundir.

____

28. Análisis sobre los trabajos de estos dos investigadores pueden consultarse entre otros en A. Perkins, 1994 y Luz Manuel Santos, 1992.

2.4.3 Procesos generales

2.4.3.2 El razonamiento

Dentro del contexto de planteamiento y resolución de problemas, el razonamiento matemático tiene que ver estrechamente con las matemáticas como comunicación, como modelación y como procedimientos.

De manera general, entendemos por razonar la acción de ordenar ideas en la mente para llegar a una conclusión.

En el razonamiento matemático es necesario tener en cuenta de una parte, la edad de los estudiantes y su nivel de desarrollo y, de otra, que cada logro alcanzado en un conjunto de grados se retoma y amplía en los conjuntos de grados siguientes. Así mismo, se debe partir de los niveles informales del razonamiento en los conjuntos de grados inferiores, hasta llegar a niveles más elaborados del razonamiento, en los conjuntos de grados superiores.

Además, conviene enfatizar que el razonamiento matemático debe estar presente en todo el trabajo matemático de los estudiantes y por consiguiente, este eje se debe articular con todas sus actividades matemáticas.

Razonar en matemáticas tiene que ver con:

- Dar cuenta del cómo y del porqué de los procesos que se siguen para llegar a conclusiones.
- Justificar las estrategias y los procedimientos puestos en acción en el tratamiento de problemas.
- Formular hipótesis, hacer conjeturas y predicciones, encontrar contraejemplos, usar hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar otros hechos.
- Encontrar patrones y expresarlos matemáticamente.
- Utilizar argumentos propios para exponer ideas, comprendiendo que las matemáticas más que una memorización de reglas y algoritmos, son lógicas y potencian la capacidad de pensar.

Para favorecer el desarrollo de este eje se debe:

- Propiciar una atmósfera que estimule a los estudiantes a explorar, comprobar y aplicar ideas. Esto implica que los maestros escuchen con atención a sus estudiantes, orienten el desarrollo de sus ideas y hagan uso extensivo y reflexivo de los materiales físicos que posibiliten la comprensión de ideas abstractas.
- Crear en el aula un ambiente que sitúe el pensamiento crítico en el mismo centro del proceso docente. Toda afirmación hecha, tanto por el maestro como por los estudiantes, debe estar abierta a posibles preguntas, reacciones y reelaboraciones por parte de los demás.

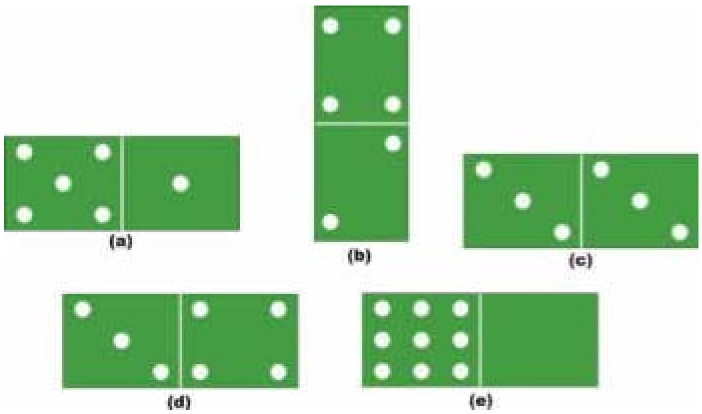
A continuación presentamos, sin pretender agotar el tema, una serie de situaciones problémicas que pueden contribuir al desarrollo del razonamiento matemático en la escuela.

PREESCOLAR

Situación 1: ¿CUÁL ES EL INTRUSO?

El maestro le pide a los niños que cada uno saque de su dominó las siguientes cinco fichas y las coloque sobre su mesa, como se muestra en la figura.

Se debe elegir la ficha que se considera diferente de las otras. El niño debe justificar su elección.



Aquí encontramos varias posibilidades en las respuestas de los niños:

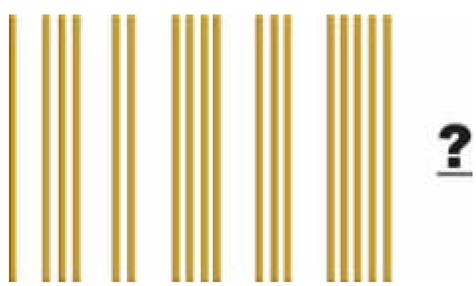
- El intruso es la ficha (e) porque es la única que tiene una parte en blanco.
- El intruso es la ficha (c) porque es la única que tiene igual número de puntos en ambas partes.
- El intruso es la ficha (b) porque es la única que está en posición vertical.
- El intruso es la ficha (d) porque es la única en la que la suma de sus puntos es igual a 7.

La importancia de una situación como ésta para el desarrollo del razonamiento matemático radica en la justificación de la respuesta por parte de los niños.

Situación 2: ¿QUÉ SIGUE Y CUÁL ES LA REGLA?

Para este problema, los niños deben sacar sus palillos y organizarlos como se indica en la figura.

El niño debe observar la secuencia que se presenta, descubrir cuál es el siguiente término de la secuencia y formular una regla de formación.



Los niños encuentran que el grupo de palillos que sigue consta de cuatro palillos y descubre dos maneras de formular la regla de formación:

- El número de palillos ubicados en las posiciones pares corresponde a los números 1, 2, 3, 4, ... y el de las posiciones impares a los números 3, 4, 5, 6, ...

- Se comienza con un palillo, se agregan dos, se quita uno, se agregan dos, ... y se continúa así.

En este proceso es importante que los niños dispongan de tiempo suficiente y que el maestro se tome tiempo para escuchar los razonamientos de los niños.

Situación 3: ¿DÓNDE VA ÉSTE?

En esta situación se utilizan palillos de diferente longitud. Luego el maestro forma con ellos una secuencia, dejando un palillo por fuera. El niño debe ubicar el palillo que le entrega el maestro, justificando su decisión.

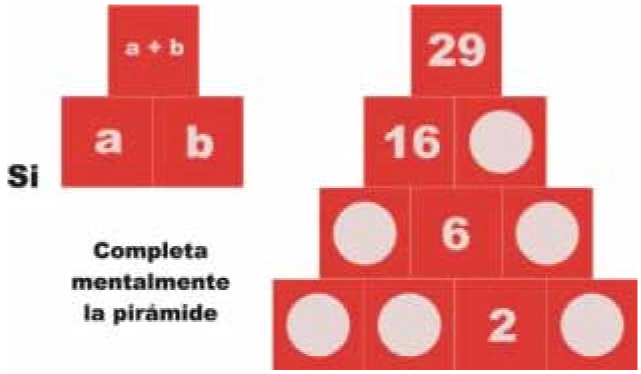
El niño debe tomar el palillo y colocarlo entre dos palillos de la secuencia, comparándolo con el anterior y el siguiente, hasta decidir cuál es su posición.

En este caso, el palillo debe ser ubicado entre el cuarto y el quinto porque su longitud es mayor que la del cuarto y menor que la del quinto.

Una vez que los niños se han familiarizado con problemas como los anteriores, realizados con material concreto, se pueden proponer problemas similares con fichas de trabajo en las que se representa el material.

CONJUNTOS DE GRADOS 1º, 2º y 3º

Situación 1



Aquí los niños realizan simultáneamente adiciones y sustracciones. En caso de cometer algún error, el mismo problema les sirve de control.

Situación 2

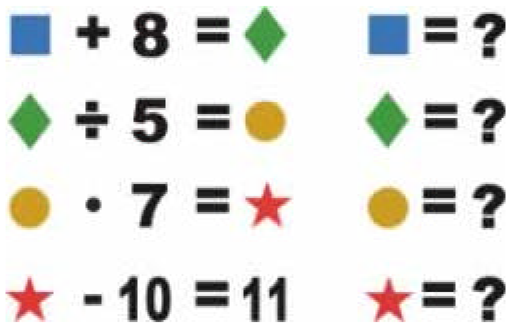
¿Cuántos números de tres dígitos diferentes tienen

suma digital 22?

Por ensayo y error los niños se dan cuenta que deben escoger dígitos “grandes”, mayores o iguales que 5. Al tratar de listarlos todos, se les pueden quedar algunos, pero al hacer una puesta en común aparecerán generalmente todos, aprendiendo unos de otros sobre sus diferentes estrategias para listarlos.

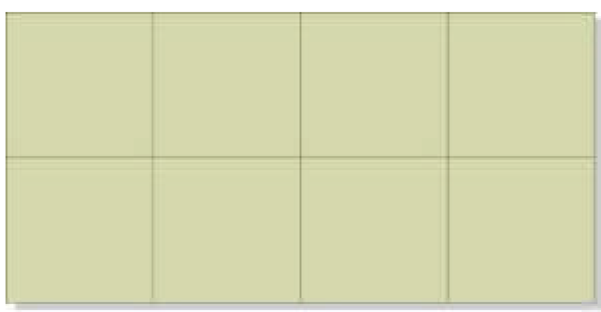
Situación 3

Hallar el valor numérico de cada uno de los símbolos.



Esta situación ilustra una importante estrategia en el enfoque de resolución de problemas, la llamada “substitución en reversa”. Aquí, el estudiante debe hallar primero el valor de la estrella, luego el del círculo, hasta encontrar el valor del cuadrado.

Situación 4



¿Cuántos Cuadros hay?

Aquí los niños comienzan contando los cuadrados de lado uno, después los de lado dos, y así sucesivamente. Es posible que los niños dejen de contar algunos, pero al mostrarles, se dan cuenta dónde estuvieron las fallas.

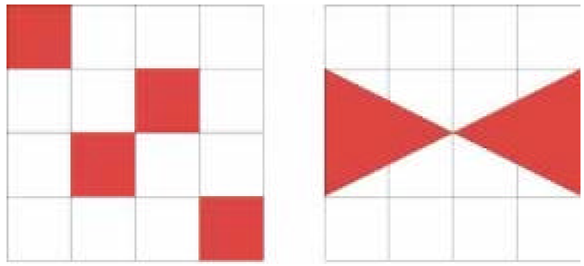
Situación 5

¿De cuántas maneras diferentes puede cambiarse un billete de $1000 y de $2000?

Se recomienda abordar esta situación de la vida diaria con muestras fotocopiadas de billetes. Los niños descomponen el número 10000 en múltiplos de 1000 y de 2000. Luego, se puede construir con ellos una tabla sistemática en la que se vayan agotando las soluciones.

Esta situación se puede ampliar proponiendo otros billetes o introduciendo monedas.

Situación 6



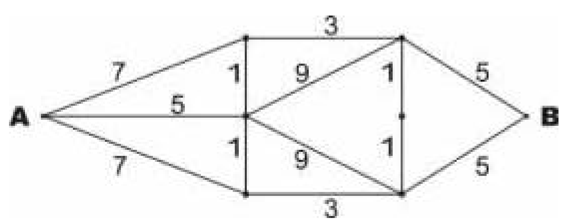
Los dos cuadrados son iguales
¿Cuál área sombreada es menor

Los niños cuentan los cuadrados en la figura de la izquierda y en la figura de la derecha van completando cuadrados. Algunos niños optan por calcar partes y trasladarlas para completar regiones que solamente contengan cuadrados.

Situación 7

A cada segmento entre dos puntos se le ha asignado un valor. Halla por lo menos tres caminos desde A hasta B cuyo valor sea 24.

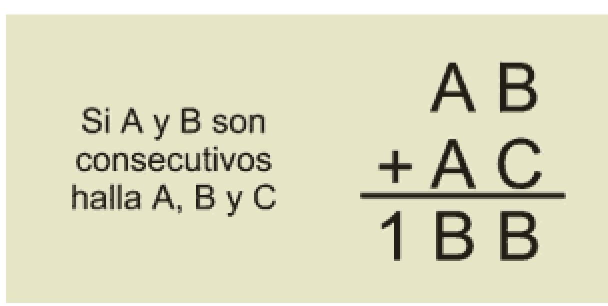
Halla un camino de longitud 24K
para ir desde A hasta B.



(Este dibujo no esta hecho a escala)

Aquí los niños van seleccionando segmentos y llevando la cuenta, tratando de hacer los ajustes para completar 24.

Situación 8



De la columna de las unidades los niños concluyen que C tiene que ser igual a cero. Luego se dan cuenta que A tiene que ser un dígito mayor o igual que cinco. Y así comienzan a analizar casos, hasta encontrar la solución al problema.

Situaciones de este tipo son muy importantes pues le permiten al maestro conocer hasta qué punto el niño maneja propiedades de las operaciones elementales.

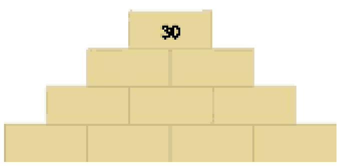
Situación 9

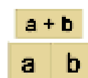
Distribuye los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 y 7 en los 7 círculos de la figura de tal manera que en cada segmento de tres círculos se cumpla: El doble del dígito del centro es igual a la suma de los números de los extremos.

Aquí los niños, por ensayo y error, van ajustando los números hasta encontrar la solución. Durante el desarrollo del problema o al terminar éste se les puede preguntar si el 7 o el 1 pueden ser ubicados en alguno de los círculos del centro de los lados del triángulo.

CONJUNTO DE GRADOS 4º, 5º y 6º

Situación 1



Si , 

y si en la primera fila hay cuatro números naturales consecutivos, complete la pirámide.

En esta situación, los estudiantes deben ensayar con números consecutivos en la primera fila. Al comienzo creerán que se trata de números consecutivos en orden creciente o decreciente, pero luego se darán cuenta de que esta condición no se ha dado. El maestro puede aprovechar esta situación para analizar con sus estudiantes cómo varía la suma de arriba cuando se colocan los números en diferentes posiciones en las casillas de la primera fila.

Situación 2

El producto de dos números es un número de dos dígitos que es múltiplo de 3 y termina en 4.
¿Cuáles números pueden ser ese producto?

Aquí los estudiantes pueden desarrollar varias estrategias para resolver el problema:

- Hacer una lista de los múltiplos de 3 menores que 100 y escoger los que terminan en 4.
- Utilizar el criterio de divisibilidad por 3 y encontrar los posibles productos determinando el dígito de las decenas.
- Como el producto buscado es múltiplo de 3 y termina en 4, entonces se hallan todos los múltiplos de 6, menores que 100 y que terminen en 4.

Situación 3

Las siguientes tres adiciones se cumplen al mismo tiempo. Conocemos las tres sumas, pero no conocemos los sumandos. Letras iguales representan dígitos iguales y letras diferentes, dígitos diferentes.

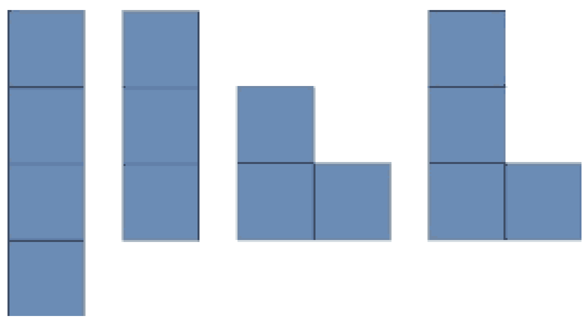
A C B

$\begin{array}{r} +A \\ \underline{\;B\;} \\ 7 \end{array}$	$\begin{array}{r} +B \\ \underline{\;C\;} \\ 11 \end{array}$	$\begin{array}{r} +C \\ \underline{\;A\;} \\ 9 \end{array}$
A=?	B=?	C=?

Hallar los sumandos

Este tipo de problemas, llamados criptoaritméticas, le dan al estudiante la oportunidad de realizar un gran despliegue de razonamiento matemático. Por ejemplo, de la adición del centro puede concluir que B es impar. ¿Por qué? Y de la adición de la izquierda se puede concluir que B solamente puede tomar los valores 1, 3 ó 5. ¿Por qué ? Luego, pueden hacer una lista sistemática, basados en los valores que puede asumir B y, así, obtener las soluciones del problema.

Situación 4



Formar con las cinco piezas un cuadrado de 4 x 4. Muestra diferentes posiciones

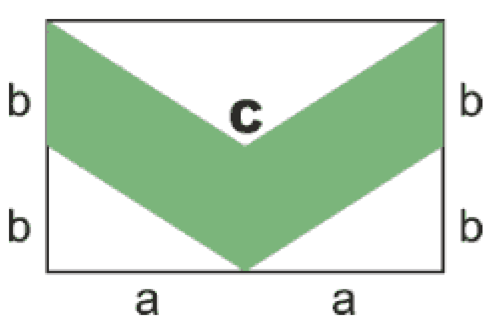
En esta situación, el estudiante puede razonar primero sobre las dimensiones del cuadrado buscado y luego, sobre la posición de las piezas. Es conveniente que los estudiantes corten las piezas e incluso las pinten de colores, esto les permitirá manipularlas fácilmente y comparar las soluciones obtenidas.

Situación 5

En la caja del supermercado sólo tienen monedas de $1000, de $500 y de $200, ¿de cuántas maneras pueden dar a un cliente $2100 de vueltas?

Los problemas de este tipo se prestan para que un gran número de estudiantes hagan sus aportes, y para construir entre todos una lista sistemática que contenga todas las soluciones.

Situación 6



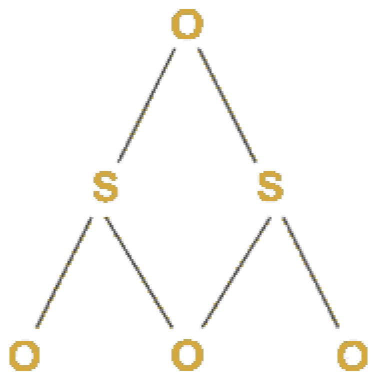
En el rectángulo C es el centro.

¿Cuál área es mayor, la sombreada o la blanca?

Generalmente estas situaciones dan lugar a que los estudiantes practiquen diferentes estrategias para la resolución de problemas de área:

- Trazando por C un segmento paralelo al lado más largo del rectángulo se puede observar que los dos triángulos sombreados que están por encima del segmento trazado pueden llenar los dos triángulos blancos que se encuentran debajo de él.
- La región sombreada se puede dividir en dos paralelogramos de base b y altura a.

Situación 7

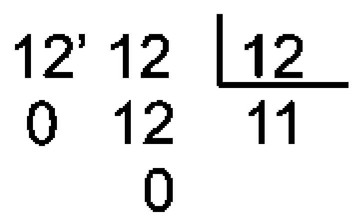


¿De cuántas maneras diferentes se puede leer la palabra OSO en el arreglo?

Como OSO es una palabra palíndroma, es decir, que se puede leer con el mismo significado de izquierda a derecha que a la inversa, el número de posibilidades aumenta. ¿Cómo? Primero los estudiantes encuentran muchas formas de leer OSO, pero luego tienen que definir criterios para hallar todas las posibilidades.

Situación 8

Rodolfo realizó en su cuaderno la división que se indica.
Pero al revisarla encontramos un error.
¿Cuál?



Una actividad importante en el desarrollo del razonamiento matemático es aprender de los errores que cometemos. Aquí los estudiantes deben justificar con claridad dónde está la falla en la que incurrió Rodolfo.

Situación 9

En estos ejercicios, los estudiantes deben justificar las ventajas numéricas y las propiedades que aprovecharon para obtener el resultado.

Calcular mental y rápidamente

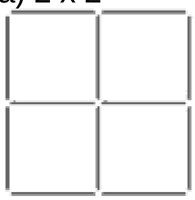
A. 2 x 977 x 5
B. 2.5 x 5 x 4
C. 4 x 17 x 2.5
D. 0.5 x 456 x 2

CONJUNTO DE GRADOS 7º, 8º Y 9º

Situación 1

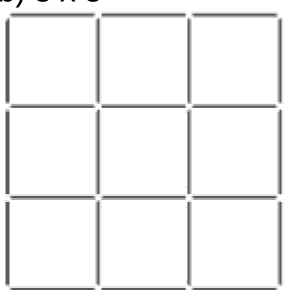
Para construir un cuadrado 2x2 con palillos de la misma longitud hacen falta 12 palillos. ¿Es cierto que para construir un cuadrado 8x8 se necesita un número cuadrado de palillos?

a) 2 x 2



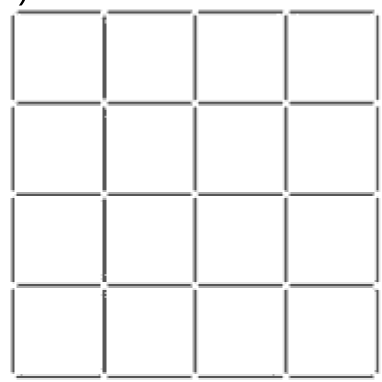
12 palillos
2 palillos en cada fila
2 palillos en cada columna
3 filas y 3 columnas

b) 3 x 3



24 palillos
3 palillos en cada fila
3 palillos en cada columna
4 filas y 4 columnas

c) 4 x 4



40 palillos
4 palillos en cada fila
4 palillos en cada columna
5 filas y 4 columnas

Si se sigue este patrón, se encuentra que para un cuadrado 8x8 hay:

- 8 palillos en cada fila y 9 filas, luego hay 72 palillos en las filas.
- 8 palillos en cada columna y 9 columnas, luego hay 72 palillos en las columnas.
- En total hay 144 palillos y como 144=122, se necesita un número cuadrado de palillos.

Como la tendencia de los estudiantes es a construir el cuadrado de 8x8, vale la pena mostrarles que se puede llegar también a la solución mediante otra estrategia.

Situación 2

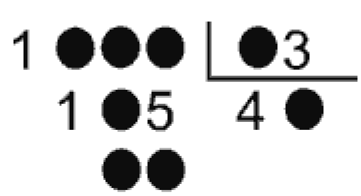
Las medidas de los ángulos de un triángulo forman la progresión aritmética AB, CD, EF sobre la que se sabe: la diferencia es FF, EF es primo y AB es un cuadrado. ¿Cuáles son las medidas?

Generalmente los estudiantes resuelven el problema por ensayo y error, utilizando solamente algunos de los datos. Conviene que poco a poco les hagamos ver que un análisis cuidadoso de las hipótesis puede resultar en un proceso mejor fundamentado. Por ejemplo: Si la diferencia es FF, ésta puede ser 11, 22, 33, 44, ..., 99. Si EF es primo, entonces FF puede ser 11, 33, 77, 99. ¿Por qué ? Si la progresión corresponde a las medidas de los ángulos de un triángulo, entonces FF puede ser o 11 o 33. Como AB debe ser un cuadrado, se obtiene como única solución la progresión : 49, 60, 71.

Si los estudiantes manejan el álgebra, pueden resolver el problema de otra manera.

Situación 3

Complete la división:



De los datos dados se sigue que el dígito de las unidades del dividendo y del cociente debe ser 5. Entonces:

$$\begin{array}{r|l} 1\bullet\bullet5 & \bullet3 \\ \hline 1\bullet5 & 40 \\ 00 & \end{array}$$

Ahora, el dígito de las decenas del divisor puede ser 2, 3 ó 4 porque el dividendo es 1●●5 y así, los candidatos a dividendo son 1035, 1485 y 1935, que corresponden a los divisores 23, 33 y 43, respectivamente. Como el primer residuo es 1●, entonces el dividendo no puede ser 1935, ni el divisor 43. Por tanto, los divisores pueden ser 23 y 33. Las dos divisiones son:

$$\begin{array}{r|l} 1035 & 23 \\ \hline 115 & 45 \\ 00 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 1845 & 33 \\ \hline 165 & 45 \\ 00 & \end{array}$$

Situación 4

¿Dónde se desperdicia más material, en (a) o en (b)?

(a) (b)

Aparentemente parece que en (a), pero si observa bien, se da cuenta que los cuadrados son de igual área y que el radio del círculo grande es el doble que el de los círculos pequeños y entonces bastaría con calcular el área de las regiones blancas para decidir en cuál de las dos situaciones se desperdicia menos material. Entonces, el área blanca en (a) es $4\cdot(\pi r^2)$ y en (b) es, $\pi\cdot(2r)^2 = 4\pi r^2$ es decir, las dos regiones blancas tienen igual área y por tanto, la cantidad de material desperdiciado en ambos casos es la misma.

Situación 5

¿Cuál es el dígito de las decenas en 11^{11}?

Una posible estrategia es calcular algunas potencias, tratar de hallar un patrón, estimar la potencia 11 y verificar el resultado.

$11^1 = 11$ dígito de las decenas 1

$11^2 = 121$ dígito de las decenas 2

$11^3 = 1331$ dígito de las decenas 3

$11^4 = 14641$ dígito de las decenas 4

....
....

11^9 = dígito de las decenas 9

11^{10} = dígito de las decenas 0

11^{11} = dígito de las decenas 1

Al calcularlo directamente, se obtiene:

11^{11} = 285 311 670 611.

Situación 6

Entre los siguientes números hay exactamente uno que es cuadrado. ¿Cuál es? 528, 323, 287, 676, 482.

Una estrategia es extraer la raíz cuadrada de cada número y encontrar que $\sqrt{676 = 26}$ = 26

Otra, en la que se nota un nivel de razonamiento diferente, es argumentar que el dígito de las unidades de los cuadrados solamente puede ser 0, 1, 4, 5, 6 ó 9; entonces el único número que puede ser un cuadrado es 676, que es el cuadrado de 26.

Situación 7

Hay botones con 2, 3 y 4 huecos para pasar el hilo. Botonio tenía una colección de botones de cada uno de estos tipos y afirmó lo siguiente: “Huecos hay en total 100 y poseo un número impar de cada uno de los tres tipos”. ¿Es Botonio buen matemático?

Si Botonio posee un número impar de cada uno de los tres tipos, entonces:

2 x impar = un número par de huecos

3 x impar = un número impar de huecos

4 x impar = un número par de huecos

El número total de huecos es:

par + impar + par = impar.

Luego, no puede ser igual a 100. Botonio es mal matemático.

Situación 8

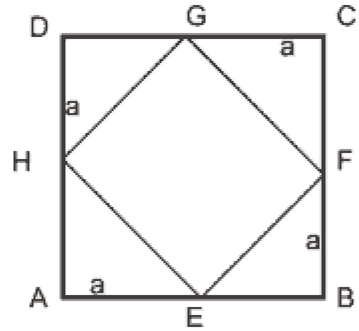
Hallar los tres sumandos y la suma si son números primos y G y D son dígitos consecutivos.

$$\begin{array}{r} AB \\ +\ CD \\ EF \\ \hline GD \end{array}$$

En la columna de las unidades es claro que B y F deben sumar 10 para que B+D+F=D. Como se lleva “1” de la columna de las unidades y como la suma tiene solamente dos dígitos, se tiene que los números en la columna de las decenas deben sumar máximo 9. Teniendo además en cuenta que todos los sumandos y la suma son primos, una solución es: 47+19+23=89.

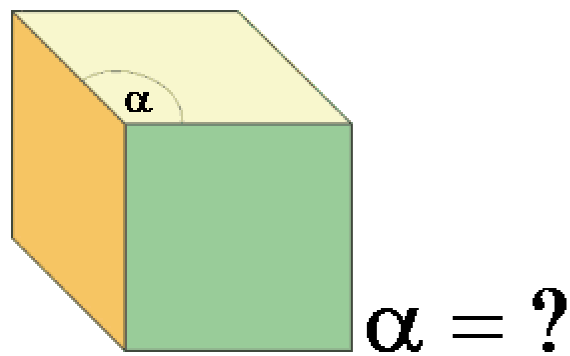
Situación 9

ABCD es un cuadrado. ¿Es EFGH un cuadrado?



Los triángulos AEH, BFE, CGF y DHG son rectángulos congruentes porque tienen los dos catetos congruentes. Luego las hipotenusas correspondientes EH, EF, FG y GH son congruentes. La mayoría de los estudiantes piensa que esto es suficiente para que EFGH sea un cuadrado. Se les puede hacer ver que esta condición es necesaria, pero no es suficiente porque entonces todo rombo sería cuadrado. Hace falta comprobar que los ángulos son rectos. Como los triángulos rectángulos son congruentes, es fácil darse cuenta que los ángulos <AEH y <FEB son complementarios y por tanto el ángulo <HEF es recto. De manera similar se argumenta para los otros ángulos, pudiéndose ahora sí afirmar que EFGH es un cuadrado.

Situación 10



Si se ve una figura plana, se tiene un hexágono regular y, en este caso, $\alpha = 120^o$. ¿Por qué?

Si se ve un sólido, se tiene un cubo y en este caso. $\alpha = 90^o$.¿Por qué?

Una vez más interesan las argumentaciones de los estudiantes a sus respuestas.

Situación 11

Si a y b representan números enteros, explique por qué la expresión 4a2 – 12ab + 9b siempre da como resultado un número mayor o igual que cero.

La estrategia más común de los estudiantes para resolver este problema consiste en reemplazar a y b por números enteros y comprobar que el resultado siempre da un número mayor o igual que cero. Pero esta estrategia solamente representa un proceso de verificación para algunos casos particulares.

La expresión $4a^2 - 12ab + 9b^2$ es un trinomio cuadrado perfecto y se puede expresar como: $4a^2 - 12ab + 9b^2 = (2a - 3b)^2$. Esta última expresión siempre es mayor o igual que cero.

Situación 12

Descubra el intruso.

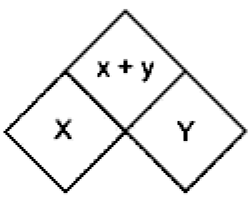
A. Un número aumentado en 7.
B. 7 más que un número.
C. La suma de un número y 7.
D. La mitad del doble de un número más 14.
E. Siete veces un número.

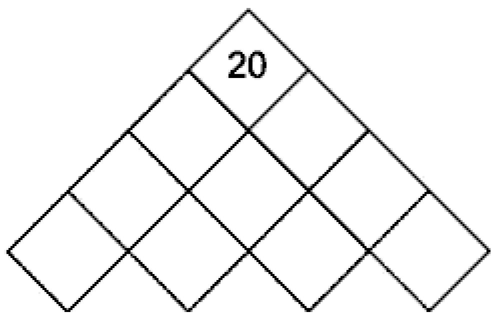
Si **X** es un número, cada una de las proposiciones anteriores se puede escribir así:

A. **X** + 7
B. **X** + 7
C. **X** + 7
D. 7 **X**

Situación 13

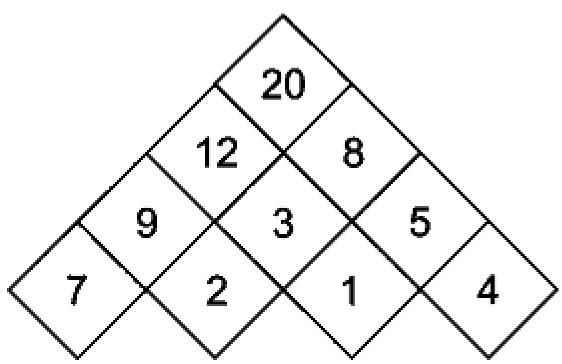
La pirámide se ha construido según la regla:





Si todos los números son diferentes, reconstruya la pirámide.

La primera dificultad consiste en entender la regla que se ha dado en forma simbólica. Después el problema se torna fácil. Hay varias soluciones y diferentes estrategias de solución. Una puede ser comenzar desde arriba hacia abajo, descomponiendo el número y teniendo en cuenta que todos los números deben ser diferentes, como por ejemplo:



GRADOS 10° y 11° DEL NIVEL DE EDUCACIÓN MEDIA

Un objetivo fundamental es el de proporcionar a los estudiantes numerosas experiencias que les hagan sentir, admirar y ejercitar el maravilloso poder lógico de su cerebro para lanzar hipótesis, formular conjeturas, confirmarlas o refutarlas, argumentar en favor o en contra de una tesis, realizar inferencias, detectar supuestos ocultos, demostrar teoremas, generar y transformar información en forma rigurosa y extraer de ella otra información no percibida a primera vista, construir algunas demostraciones para enunciados matemáticos, dar contraejemplos. Deben aprender diferentes métodos de demostración. Tener experiencias en las que utilicen razonamientos inductivos y deductivos. Es necesario también analizar afirmaciones de la vida cotidiana a partir de los principios lógicos que sustentan la argumentación.

Como pauta de evaluación se pretende indagar si el estudiante:

- Formula hipótesis, las pone a prueba, argumenta a favor y en contra de ellas y las modifica o las descarta cuando no resisten la argumentación.
- Sigue argumentos lógicos, juzga la validez de un argumento y construye argumentos lógicos sencillos y válidos.
- Analiza situaciones de la vida diaria.
- Disfruta y se recrea en exploraciones que retan su pensamiento y saber matemático y exigen la manipulación creativa de objetos, instrumentos de medida, materiales y medios.
- Hace inferencias a partir de diagramas, tablas y gráficas que recogen situaciones del mundo real; estima, interpreta y aplica diferentes medidas.
- Detecta y aplica distintas formas de razonamiento y métodos de argumentación en la vida cotidiana, en las ciencias sociales, en las ciencias naturales y en las matemáticas; analiza ejemplos y contraejemplos para cambiar la atribución de necesidad o suficiencia a una condición dada.
- Hace preguntas y elabora proposiciones hipotético-deductivas.

También es necesario tener en cuenta que hay que apoyar y asesorar a los alumnos para que aprendan a pensar mejor, más finamente, más coherentemente, más lógicamente, más críticamente. Por ejemplo, basta oírlos discutir, argumentar y defender sus ideas o sus interpretaciones a propósito de los reglamentos deportivos y especialmente cuando en sus juegos hay decisiones controvertidas.

Se debe entonces partir de los razonamientos cotidianos que los alumnos producen en sus discusiones. En éstos se debe distinguir entre la certeza subjetiva con que se mantiene una posición, su probabilidad, su verdad o falsedad y la validez de los argumentos que la apoyan.

Otra actividad que se puede realizar es analizar anuncios comerciales de radio, televisión, revistas o periódicos. Buscar posibles errores de interpretación. Descubrir una forma lógica de presentar los anuncios y otras formas equivalentes.

Además, se deben posibilitar debates en grupos, en donde se asumen distintos puntos de vista, cambios de roles en juegos argumentativos, ..., ..., ayudan a la formación del espíritu crítico, a la descentración del propio punto de vista y al desarrollo de la tolerancia mutua.

A continuación se proponen algunos ejemplos de razonamiento.

a) Afirmación de la hipótesis

Se acepta una condicional; si luego se comprueba que el antecedente es verdadero, se deduce que el consecuente tiene que ser verdadero.

(1) Siempre que es época de lluvias, el pasto se pone verde.

(2) El mes de mayo, generalmente, es de lluvias.

(3) Luego, en mayo el pasto se pone verde

b) Negación de la conclusión

Se acepta una condicional; si luego se comprueba que el consecuente es falso, se deduce que el antecedente tenía que ser falso.

(1) Si vota hoy en las elecciones para escoger presidente de Colombia entonces tiene 18 o más años de edad.

(2) Hoy no tiene 18 o más años de edad

(3) Luego, hoy no puede votar en las elecciones presidenciales.

c) Regla de la cadena

Se acepta una condicional y otra que tiene como antecedente el consecuente del primero, se deduce después una condicional que tiene como antecedente el de la primera y como consecuente el de la segunda.

(1) Si se firma un acuerdo de paz con los grupos armados por fuera de la ley entonces se da un paso importante hacia la construcción de la paz en Colombia.

(2) Si se dan pasos importantes hacia la construcción de la paz en Colombia entonces se reactiva la economía.

(3) Luego, si se firma un acuerdo de paz con los grupos armados por fuera de la ley entonces se reactiva la economía.

d) Argumentación inválida

Hay también argumentaciones inválidas, una común es pretender que porque se niega el antecedente de un condicional aceptado, entonces el consecuente es falso.

(1) Si un número diferente de 2 es divisible por 2 entonces no es primo.

(2) Este número diferente de 2 no es divisible por 2.

(3) Luego es primo.

Claramente la argumentación es incorrecta porque por ejemplo 15 no es divisible por 2 pero tampoco es primo. En este caso se dice que 15 es un contraejemplo que permite ver lo falso del argumento.

En la argumentación se debe tener en cuenta que una cosa es que un enunciado esté bien formulado y otra que la argumentación esté bien construida.

Una cosa es que la argumentación sea correcta o válida y otra que cada enunciado sea verdadero.

Una cosa es que la conclusión sea verdadera y otra que sí esté correcta o válidamente demostrada.

Ejemplos:

Tesis: $2 = 1$

Argumentación:

1) Sean a, b números, con $a = b$ (Hipótesis)
2) $a^2 = a \cdot b$
3) $a^2 - b^2 = a \cdot b - b^2$
4) $(a - b)(a + b) = (a - b)b$
5) $a + b = b$
6) $b + b = b$
7) $2b = b$
8) $2 = 1$

La conclusión es falsa y la argumentación, aunque parece correcta, tiene un error que usted debe encontrar.

Hipótesis: $-1 = 1$ (Falsa)

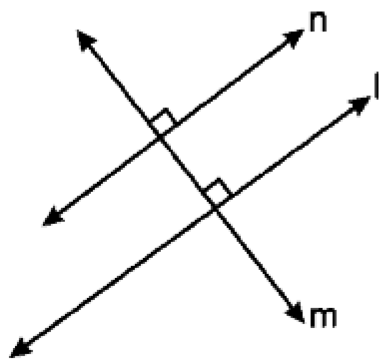
Tesis: $0 = 0$ (Verdadera)

Argumentación:

-1 = 1
1 = -1
(-1) + 1 = 1 + (-1)
0 = 0

Conclusión verdadera que se deduce correctamente de una hipótesis falsa.

Hace falta justificar cada paso.



Analizar la siguiente argumentación para l, m y n rectas en el mismo plano:

l es perpendicular a m
m es perpendicular a n
Luego: l es perpendicular a n

¿Es la relación “ser perpendicular a ...” (en el plano) una relación transitiva? ¿Y en el espacio?

Lo que garantiza una deducción válida es que si las premisas y postulados son verdaderos, la conclusión también debe ser verdadera. En el lenguaje ordinario lo que ocurre es que no se suelen explicitar muchas de las hipótesis y de los supuestos utilizados en la argumentación y esto conduce a diferentes posibilidades de interpretación y en muchos casos a sacar conclusiones falsas.

Ejemplos:

Supongamos que nadie dejó de ir a la fiesta. ¿Se deduce de ahí que todos fueron?

Se puede deducir que ¿algunos no vinieron a partir de algunos vinieron?

En un contrato con una firma de seguros dice:

“En caso de que usted no haya pagado la última cuota o que su póliza esté vencida, si sufre un accidente no puede exigir el pago del seguro”.

Sin embargo eso no quiere decir que si ha pagado puntualmente y su póliza no esté vencida, sí pueda exigirlo. Lo que nos obliga a pedir un artículo que lo explicite así.

En matemáticas se debe ejercitar a los estudiantes en los procesos de razonamiento inductivo y deductivo, así:

Razonamiento inductivo

Se observa que una propiedad es verdadera para cada caso que se verifica.

Se generaliza que será verdadera para todos los casos y se comprueba.

Ejemplos:

El cuadrado de un número natural impar es impar.

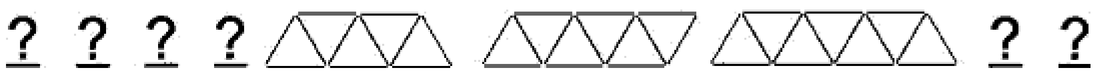
$1^2 = 1$ impar
$3^2 = 9$ impar
$5^2 = 25$ impar

Se afirma que el cuadrado del número n impar, será impar

$n = 2k + 1,\ k \in N$ (forma general de los números impares)
$n^2 = (2k + 1)^2$
$n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$
$n^2 = 2t + 1 \quad t = 2k^2 + 2k \in N$
Luego, n^2 es impar.

En el caso de que la generalización no sea válida se debe mostrar un contraejemplo.

Los que faltan son:



Construya los que faltan. ¿Cuál es la regla?

La regla es: el siguiente se consigue agregando dos palillos para formar un nuevo triángulo.

Si **n** es la **n**-ésima figura y **f(n)** es el número de palillos, entonces f**(n) = ?**

Los números impares mayores que 1 y menores que 20 son primos.

Esta afirmación se puede verificar con 3, 5, 7, 11, 13, 17 y 19 pero no se puede generalizar porque 9 y 15 son impares mayores que 1 y menores que 20 pero no son primos.

Si un cuadrilátero tiene 4 lados congruentes entonces tiene 4 ángulos congruentes.

Esta afirmación es falsa porque si bien se puede verificar con el cuadrado, no es cierta para un rombo cualquiera. ¿Por qué?

El rombo es un contraejemplo para la afirmación.

¿Es $n^2 - n + 41$ un número primo para todo $n \in N$?

Verificar para n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...

Después de probar con varios números uno está tentado a pensar que funciona con todos. Sin embargo, muestre que 41 es un contraejemplo para la afirmación.

Razonamiento deductivo

Se empieza con las condiciones dadas (Hipótesis).

Se justifica cada paso en el proceso de argumentación.

Se afirma la conclusión.

Ejemplos:

Si a, b, c $\in$ R, a < b y c > 0

entonces a x c < b x c

(1) a < b y c > 0 Hipótesis
(2) b - a > 0 Definición de orden
(3) (b - a)$\cdot$ c > 0 Producto de positivos es positivo
(4) bc - ac > 0 Distributiva
(5) ac < bc Definición de orden

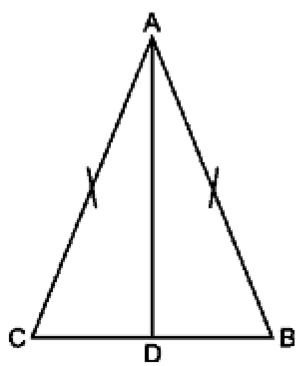
Dado un $\triangle$ ABC isósceles con AB $\cong$ AC, AD bisectriz de $\angle$ A

Probar que:

AD es una mediana del $\triangle$ ABC

Prueba:

(1) $\triangle$ CAD $\cong$ BAD L.A.L.
(2) $\triangle$ CD $\cong$ DB
(3) Luego AD es mediana



Hace falta justificar algunos pasos.

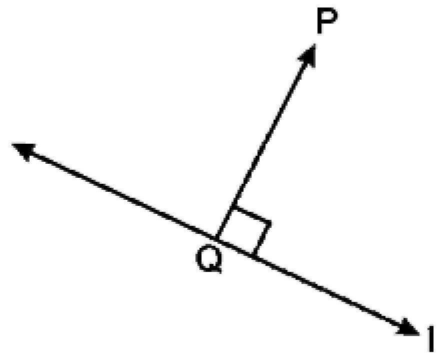
Verificar una identidad trigonométrica

sen x + cos x cot x = csc x

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x + \cos x \cot x &= \operatorname{sen} x + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \\ &= \operatorname{sen} x + \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x} \\ &= \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen} x} \\ &= \frac{1}{\operatorname{sen} x} \rightarrow \csc x \end{aligned}$$

Justifique cada paso

Desarrollar un argumento lógico para convencer a alguien que la distancia más corta entre el punto P y una recta l es la longitud de PQ donde Q está sobre l y l es perpendicular a PQ



Para demostrarlo basta tomar otro punto R sobre l (¿por qué se puede tomar?) y analizar las longitudes de los lados del triángulo rectángulo PQR.

Un buen ejercicio consiste en escribir los pasos de la demostración de un teorema y solicitar a los estudiantes que justifiquen cada paso. ¿Qué se hizo? ¿Por qué?

Dentro del razonamiento matemático las proposiciones condicionales "si... entonces..." son muy importantes. Un propósito fundamental es distinguir en ellas el antecedente y el consecuente; las condiciones suficientes de las necesarias y de las que son suficientes y necesarias. Así mismo, dada una proposición condicional, distinguir las transformaciones que la cambian en su recíproca, su contraria y su contra–recíproca.

Ejemplos:

La mamá le dice al hijo: "si sacas buenas calificaciones puedes ir a la excursión (y si no después hablamos)".

En este caso la condición sacar buenas calificaciones era una condición suficiente pero no necesaria.

De otra parte, si el papá le dice: "si sacas buenas calificaciones puedes ir a la excursión (y si no, no)", el antecedente sacar buenas calificaciones es condición suficiente y necesaria para que pueda ir a la excursión.

Un teorema en cálculo afirma que si una función es derivable entonces es continua. Una proposición condicional equivalente, la contra-recíproca, nos permite a partir de la gráfica de la función determinar si es derivable, dice: si una función no es continua entonces no es derivable.

¿Será cierta la contraria, si una función es continua entonces es derivable?

Analice la función f(x) = | x | en x = 0

Otro teorema de cálculo afirma que si

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$ entonces

$\lim [f(x) + g(x)] = L + M$

A partir de este teorema podríamos preguntarnos si es posible encontrar dos funciones f y g tales que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$

entonces $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = L + M$

A partir de este teorema podríamos preguntarnos si es posible encontrar dos funciones f y g tales que lím f(x) y lím g(x) x ⟶ x ⟶ a

no existan pero que lím [f(x) + g(x)] sí exista
x ⟶ a

¿Qué tal f(x) = 1 / x-a y g(x) = -1 / x-a

¿Contradice este ejemplo el teorema?

Vale la pena también ejercitarse en sacar conclusiones o completar argumentos como:

(1) Si dos ángulos son rectos, son congruentes
(2) ∠A no es congruente con ∠B
(3) Por tanto:

Teorema:

Si ABC es rectángulo con ∠C recto entonces ∠A y ∠ B son complementarios.

(1)

(2) m∠A + m∠B + m∠C = 180º y m∠C = 90º;

(3) m∠A + m∠B =

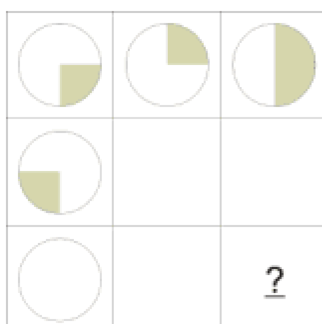
Por tanto

(3) ∠A y ∠B . . .

Por tanto:

——///——

¿Cuál va en el espacio indicado? ¿Por qué?



2.4.3 Procesos generales

2.4.3.3 La comunicación

Una necesidad común que tenemos todos los seres humanos en todas las actividades, disciplinas, profesiones y sitios de trabajo es la habilidad para comunicarnos. Los retos que nos plantea el siglo XXI requieren que en todas las profesiones científicas y técnicas las personas sean capaces de:

- Expresar ideas hablando, escribiendo, demostrando y describiendo visualmente de diferentes formas.
- Comprender, interpretar y evaluar ideas que son presentadas oralmente, por escrito y en forma visual.
- Construir, interpretar y ligar varias representaciones de ideas y de relaciones.
- Hacer observaciones y conjeturas, formular preguntas, y reunir y evaluar información.
- Producir y presentar argumentos persuasivos y convincentes.

En los últimos años se ha incrementado el interés de los investigadores por estudiar cómo comunican ideas matemáticas los alumnos y qué factores facilitan o impiden el desarrollo de habilidades comunicativas.

Muchas de estas características y habilidades se dan diariamente en la interacción de los alumnos en las clases, pero no se le ha puesto suficiente atención en el currículo de matemáticas, en parte por las limitaciones del tiempo y en parte porque se cree que no son tan importantes y que son asunto de los profesores de otras áreas.

Diversos estudios han identificado la comunicación como uno de los procesos más importantes para aprender matemáticas y para resolver problemas.

Al respecto se dice que "la comunicación juega un papel fundamental, al ayudar a los niños a construir los vínculos entre sus nociones informales e intuitivas y el lenguaje abstracto y simbólico de las matemáticas; cumple también una función clave como ayuda para que los alumnos tracen importantes conexiones entre las representaciones físicas, pictóricas, gráficas, simbólicas, verbales y mentales de las ideas matemáticas. Cuando los niños ven que una representación, como puede serlo una ecuación, es capaz de describir muchas situaciones distintas, empiezan a comprender la potencia de las matemáticas; cuando se dan cuenta de que hay formas de representar un problema que son más útiles que otras, empiezan a comprender la flexibilidad y la utilidad de las matemáticas" [29].

Thomas A. Romberg en su artículo "Características problemáticas del currículo escolar de matemáticas" (página 375) destaca la comunicación verbal y escrita como una parte crucial del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, por las siguientes razones:

En primer lugar, la comunicación en forma de argumento lógico es fundamental para el discurso matemático. En segundo lugar, la comunicación es el medio por el cual los conocimientos personales se sistematizan en un ámbito y, por tanto, se aceptan como conocimiento nuevo. En tercer lugar el desarrollo en las categorías y estructuras del sistema lingüístico estructura la comprensión del niño y la hace progresar hacia un modelo de conciencia pública.

En consecuencia con estas ideas, el autor propone que el trabajo de los alumnos debe dejar de ser actuar con estructuras ajenas, responder a preguntas ajenas y esperar que el profesor compruebe la respuesta. Además, que la evaluación del desempeño y de los conocimientos de los alumnos no debe seguir basándose en pruebas en las que las respuestas de éstos sean limitadas a respuestas cortas, correctas o incorrectas, y que en la creación del conocimiento sólo existe lo que se ajusta a la estructura del conocimiento matemático ya creado por el alumno y lo que no se ajusta a ella y debe, por tanto, sugerir la conjetura.

De esta manera las funciones y el trabajo de los alumnos y de los profesores se consideran complementarias. El profesor debe guiar, escuchar, discutir, sugerir, preguntar y clarificar el trabajo de los alumnos a través de actividades apropiadas e interesantes.

La necesidad y la oportunidad para que los estudiantes comuniquen sus ideas matemáticas y hablen sobre las matemáticas deben estar consideradas en las propuestas curriculares formuladas en los PEI, tanto en las estrategias de enseñanza, como en las actividades de aprendizaje y en las tareas o actividades de evaluación.

La comunicación es la esencia de la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación de las matemáticas.

"Las clases deberían caracterizarse por las conversaciones sobre las matemáticas entre los estudiantes y entre éstos y el profesor. Para que los profesores maximicen la comunicación con y entre los estudiantes, deberían minimizar la cantidad de tiempo que ellos mismos dominan las discusiones en el salón de clase" [30].

En nuestras clases los profesores necesitamos escuchar lo que los estudiantes comprenden, lo que ellos saben, lo que ellos piensan sobre las matemáticas y sobre su aprendizaje, escuchar las preguntas que hacen y las que no hacen, etc., para conocer cómo van sus procesos de razonamiento, de resolución de problemas, etc., para orientar el uso del lenguaje matemático y ayudarlos a desarrollar su habilidad para comunicar matemáticas.

La comunicación es la esencia de la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación de las matemáticas.

Para que los estudiantes puedan comunicarse matemáticamente necesitamos establecer un ambiente en nuestras clases en el que la comunicación sea una práctica natural, que ocurre regularmente, y en el cual la discusión de ideas sea valorada por todos. Este ambiente debe permitir que todos los estudiantes:

- Adquieran seguridad para hacer conjeturas, para preguntar por qué, para explicar su razonamiento, para argumentar y para resolver problemas.

- Se motiven a hacer preguntas y a expresar aquellas que no se atreven a exteriorizar.

- Lean, interpreten y conduzcan investigaciones matemáticas en clase; discutan, escuchen y negocien frecuentemente sus ideas matemáticas con otros estudiantes en forma individual, en pequeños grupos y con la clase completa.

- Escriban sobre las matemáticas y sobre sus impresiones y creencias tanto en informes de grupo, diarios personales, tareas en casa y actividades de evaluación.

- Hagan informes orales en clase en los cuales comunican a través de gráficos, palabras, ecuaciones, tablas y representaciones físicas.

- Frecuentemente estén pasando del lenguaje de la vida diaria al lenguaje de las matemáticas y al de la tecnología.

"La comunicación matemática puede ocurrir cuando los estudiantes trabajan en grupos cooperativos, cuando un estudiante explica un algoritmo para resolver ecuaciones, cuando un estudiante presenta un método único para resolver un problema, cuando un estudiante construye y explica una representación gráfica de un fenómeno del mundo real, o cuando un estudiante propone una conjetura sobre una figura geométrica. El énfasis debería hacerse sobre todos los estudiantes y no justamente sobre los que se expresan mejor" [31].

[29.] NCTM, Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática, 1989, pág. 25.

[30.] NCTM, Professional Standars for Teaching Matematics, 1991, pág. 96.

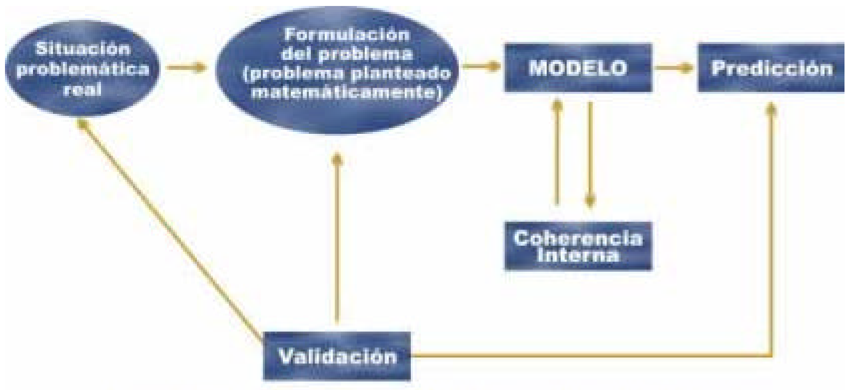
[31.] Ibídem.

2.4.3 Procesos generales

2.4.3.4 La modelación

La sociedad ha experimentado en los últimos tiempos un cambio de una sociedad industrial a una sociedad basada en la información; dicho cambio implica una transformación de las matemáticas que se enseñan en la escuela, si se pretende que los estudiantes de hoy sean ciudadanos realizados y productivos en el siglo que viene.

Actualmente, con la aparición de la era informática, uno de los énfasis que se hace es la búsqueda y construcción de modelos matemáticos. La tecnología moderna sería imposible sin las matemáticas y prácticamente ningún proceso técnico podría llevarse a cabo en ausencia del modelo matemático que lo sustenta.



Elementos básicos de la construcción de modelos

Cuando hablamos de la actividad matemática en la escuela destacamos que el alumno aprende matemáticas "haciendo matemáticas", lo que supone como esencial la resolución de problemas de la vida diaria, lo que implica que desde el principio se integren al currículo una variedad de problemas relacionados con el contexto de los estudiantes.

La resolución de problemas en un amplio sentido se considera siempre en conexión con las aplicaciones y la modelación. La forma de describir ese juego o interrelación entre el mundo real y las matemáticas es la modelación.

Los elementos básicos de la construcción de modelos se presentan a través de la siguiente figura propuesta por el matemático holandés Hans Freudenthal, quien considera que el núcleo básico del currículo de matemáticas en la escuela debe ser el aprendizaje de las estrategias de matematización.

El punto de partida de la modelación es una situación problemática real.

Esta situación debe ser simplificada, idealizada, estructurada, sujeta a condiciones y suposiciones, y debe precisarse más, de acuerdo con los intereses del que resuelve el problema. Esto conduce a una formulación del problema (que se pueda manejar en el aula), que por una parte aún contiene las características esenciales de la situación original, y por otra parte está ya tan esquematizada que permite una aproximación con medios matemáticos.

Los datos, conceptos, relaciones, condiciones y suposiciones del problema enunciado matemáticamente deben trasladarse a las matemáticas, es decir, deben ser matematizados y así resulta un modelo matemático de la situación original. Dicho modelo consta esencialmente de ciertos objetos matemáticos, que corresponden a los "elementos básicos" de la situación original o del problema formulado, y de ciertas relaciones entre esos objetos, que corresponden también a relaciones entre esos "elementos básicos".

El proceso de resolución de problemas continúa mediante el trabajo de sacar conclusiones, calcula y revisa ejemplos concretos, aplica métodos y resultados matemáticos conocidos, como también desarrollando otros nuevos. Los computadores se pueden utilizar también para simular casos que no son accesibles desde el punto de vista analítico. En conjunto, se obtienen ciertos resultados matemáticos.

Estos resultados tienen que ser validados, es decir, se tienen que volver a trasladar al mundo real, para ser interpretados en relación con la situación original. De esta manera, el que resuelve el problema también valida el modelo, si se justifica usarlo para el propósito que fue construido.

Cuando se valida el modelo pueden ocurrir discrepancias que conducen a una modificación del modelo o a su reemplazo por uno nuevo. En otras palabras, los procesos de resolución de problemas pueden requerir devolverse o retornar varias veces. Sin embargo, en ocasiones, ni siquiera varios intentos conducen a resultados razonables y útiles, tal vez porque el problema simplemente no es accesible al tratamiento matemático desde el nivel de conocimientos matemáticos del que trata de resolverlo.

Cuando se consigue un modelo satisfactorio, éste se puede utilizar como base para hacer predicciones acerca de la situación problemática real u objeto modelado, para tomar decisiones y para emprender acciones.

La capacidad de predicción que tiene un modelo matemático es un concepto poderoso y fundamental en las matemáticas.

Algunos autores distinguen entre la modelación y la matematización mientras que otros las consideran equivalentes. Nosotros consideramos la matematización como el proceso desde el problema enunciado matemáticamente hasta las matemáticas y la modelación o la construcción de modelos como el proceso completo que conduce desde la situación problemática real original hasta un modelo matemático.

Treffers y Goffree describen la modelación como "una actividad estructurante y organizadora, mediante la cual el conocimiento y las habilidades adquiridas se utilizan para descubrir regularidades, relaciones y estructuras desconocidas" [32].

El proceso de modelación no solamente produce una imagen simplificada sino también una imagen fiel de alguna parte de un proceso real pre-existente. Más bien, los modelos matemáticos también estructuran y crean un pedazo de realidad, dependiendo del conocimiento, intereses e intenciones del que resuelve el problema.

Estos mismos autores proponen que "para transferir la situación problemática real a un problema planteado matemáticamente, pueden ayudar algunas actividades como las siguientes:

- Identificar las matemáticas específicas en un contexto general;
- esquematizar;
- formular y visualizar un problema en diferentes formas;
- descubrir relaciones;
- descubrir regularidades;
- reconocer aspectos isomorfos en diferentes problemas;
- transferir un problema de la vida real a un problema matemático;
- transferir un problema del mundo real a un modelo matemático conocido.

Una vez que el problema ha sido transferido a un problema más o menos matemático, este problema puede ser atacado y tratado con herramientas matemáticas, para lo cual se pueden realizar actividades como las siguientes:

- representar una relación en una fórmula;
- probar o demostrar regularidades;
- refinar y ajustar modelos;
- utilizar diferentes modelos;
- combinar e integrar modelos;
- formular un concepto matemático nuevo;
- generalizar.

La generalización se puede ver como el nivel más alto de la modelación" [33].

Veamos a través de ejemplos sencillos algunas de las actividades implícitas en la modelación, que nos permitirán concentrar nuestra atención en las relaciones entre el problema y el modelo.

Aunque la siguiente no es una verdadera situación problemática, sí es un ejercicio o problema de los que comúnmente tienen que resolver los alumnos de la educación básica primaria.

Ejemplo 1

"Una familia de cuatro (4) personas ha invitado a tres (3) amigos a comer a su casa. ¿Cuántos puestos se pondrán en la mesa?

Para resolver el problema los niños pueden crear un modelo como el siguiente:

3 + 4 = ?, en el que ya han abstraído aquellas partes del problema que son importantes para la solución del mismo. Se ha separado lo esencial de lo accesorio y se abstraen sólo rasgos matemáticos, que nos permiten utilizar un modelo con el cual ya estamos familiarizados. La respuesta a la búsqueda en el modelo matemático es 7.

Ahora, en el sentido inverso, nos devolvemos para validar el resultado, es decir para incorporar este resultado en el dominio físico para dar la respuesta al problema original, así la respuesta es: se deben colocar siete (7) puestos en la mesa.

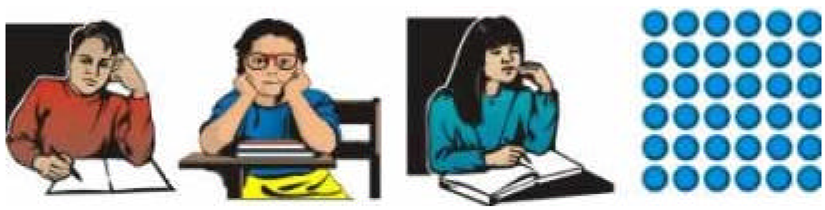
Se parte de una situación para modelarla matemáticamente.

Ejemplo 2

Ilustra la capacidad de modelación en una situación problemática de distribución. Incluso, sin haberlo aprendido, los niños de 8 ó 9 años saben qué hacer en situaciones en las que deben repartir.

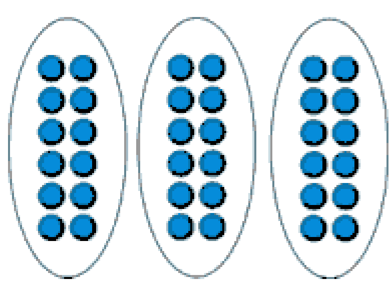
La situación se les puede presentar de la siguiente manera:

Tres niños se reparten 36 dulces. ¿Cuántos le tocan a cada uno?



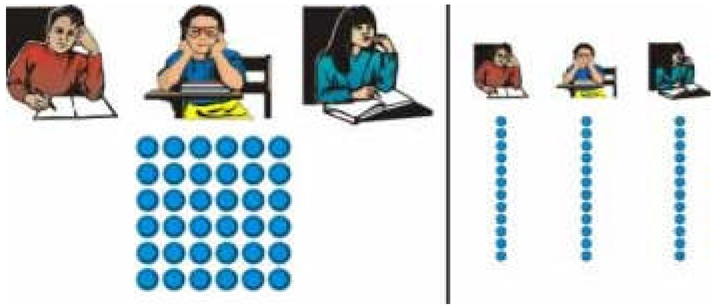
Los estudiantes inventaron diferentes modelos para resolver el problema. Veamos algunas de las soluciones.

Solución 1:



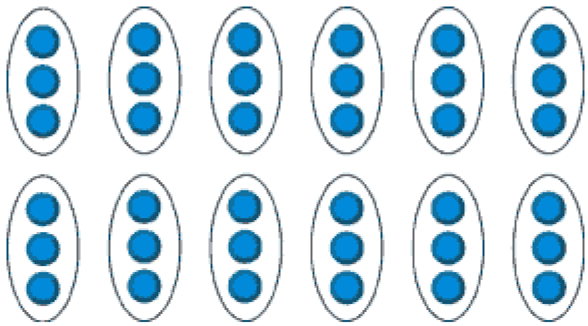
Dividiendo el área del cuadrado en tres áreas iguales, correspondiéndole 12 dulces a cada niño.

Solución 2:



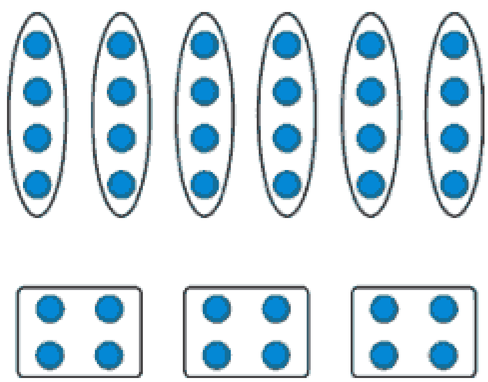
Distribución uno a uno, tachándolos del total y asignándolos en orden a cada niño. Al final cada niño recibe 12 dulces.

Solución 3:



Haciendo grupos de a tres y razonando que cada vez que se da un dulce a cada niño el total disminuye en tres. Al final averiguan cuántos grupos de tres se forman y obtienen 12.

Solución 4:



De las tablas de multiplicar, los niños saben que 12=3x4 y descubren con este conocimiento que si tienen 12 dulces, entonces a cada uno de los tres niños le corresponden cuatro dulces. Haciendo esto tres veces, se agota el total. Entonces a cada niño le corresponden 12 dulces.

En las soluciones anteriores los niños presentan diferentes modelos para resolver la situación problemática planteada. Detrás de estas soluciones podemos ver concepciones de la división como sustracción repetida, como distribución en partes iguales o como la operación inversa de la multiplicación.

Hay que tener en cuenta que el término modelo no se debe tomar literalmente. Los modelos que hacen los estudiantes se pueden referir a una situación modelo, a un esquema, a una descripción o a una forma de simbolizar.

En el ejemplo anterior los alumnos presentaron modelos a través de esquemas.

Ejemplo 3

¿Cuántas diagonales tiene un polígono de n lados?

Un estudiante de noveno grado describió su solución de la siguiente manera:

"Ensayé con varios polígonos trazando todas sus diagonales y a través de esta experiencia me di cuenta que desde un vértice solamente podía trazar un número de diagonales igual al número de vértices del polígono, menos tres. Repitiendo esto para cada uno de los vértices, noté que cada diagonal se trazaba dos veces, correspondientes a los vértices de sus extremos. Entonces el número total de diagonales de un polígono de n lados es igual a la mitad del producto n(n-3).

Aquí vemos que el estudiante de este nivel ha modelado el problema planteado por medio de una descripción.

La modelación es un proceso muy importante en el aprendizaje de las matemáticas, que permite a los alumnos observar, reflexionar, discutir, explicar, predecir, revisar y de esta manera construir conceptos matemáticos en forma significativa. En consecuencia, se considera que todos los alumnos necesitan experimentar procesos de matematización que conduzcan al descubrimiento, creación y utilización de modelos en todos los niveles.

Se ha visto que la mayoría de las llamadas definiciones que dan los libros son el resultado de un proceso de modelación que si se omite obliga a los estudiantes a aprendérselas de memoria, porque no ha formado el modelo mental en el cual esa definición sí tiene sentido.

Si se mira la historia de las matemáticas escolares se ve que la primera modelación de los niños es la del infinito –cuando ven que al contar y contar nunca acaban–, y así se arman un modelo de que los números son infinitos, hecho que podrán formalizar posteriormente.

- Para los niños pequeños no tienen sentido ni el cero natural, ni el cero de conjuntos, ni el cero de comienzo de la recta si no lo han modelado a partir del conteo en reversa, hasta darse cuenta que allá donde ellos comienzan, debe haber un cero. Éste es un modelo mental. Mientras no lo posean, los niños no sabrán dónde colocar el cero en la recta numérica, si en la primera rayita o en la segunda.

- En las medidas, los fraccionarios aparecen en las puntas que sobran, después de medir unas cuantas unidades. No aparecen al comienzo de cero para arriba como nosotros creemos; esta situación hay que modelarla expresamente.

- En cualquier problema, cuando uno cree que el alumno no puede pasar de la historia a la ecuación, lo que faltó fue un proceso de modelación de los hechos relatados en la historia.

- El estudio de las funciones en la educación básica secundaria tiene más sentido si se hace a partir de la modelación de situaciones de cambio, como se propuso en la Renovación Curricular [34]. Es importante que los alumnos se sensibilicen ante los patrones que se encuentran a diario en diversas situaciones, a describirlos y a elaborar modelos matemáticos de esos patrones y a establecer relaciones. Si el estudio del álgebra se hace partiendo de expresiones simbólicas, como se ha hecho tradicionalmente, se está privando al alumno de la experiencia de modelación para llegar a esos sistemas simbólicos.

- Se ha visto también que toda la dificultad que tienen los alumnos en la resolución de problemas en geometría, en cálculo, en física, es debido a la falta de cultivar el proceso de modelar mentalmente situaciones de la vida real.

Ante una situación problemática compleja de la vida diaria, en la que suele haber exceso de información, muchas veces falta otra información importante, que sin el proceso de modelación el alumno nunca podrá resolver.

Finalmente hay que tener en cuenta que los procesos de modelación tienen que ver con el nivel de lenguaje de los niños; a veces el lenguaje facilita o retarda la comprensión de la realidad. También, que la variedad de alumnos en la clase puede hacer que se produzcan diferentes clases de modelos que estén al alcance de los diferentes niños según su desarrollo, (ver ejemplo 2).

Se puede impulsar el nivel de matematización de los alumnos escogiendo problemas apropiados; haciéndoles preguntas sobre el poder del modelo, sobre sus reflexiones, sus explicaciones y sus predicciones; y orientándolos a producir la solución

---

32. Jan de Lange, Mathematics Insight and Meaning, pág. 43.

33. Ibídem.

34. Pueden consultarse las Propuestas de Programa Curriculares para los grados 7°, 8° y 9 °.

2.4.3 Procesos generales

2.4.3.5 La elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos

Además de que el estudiante razone y se comunique matemáticamente, y elabore modelos de los sistemas complejos de la realidad, se espera también que haga cálculos correctamente, que siga instrucciones, que utilice de manera correcta una calculadora para efectuar operaciones, que transforme expresiones algebraicas desde una forma hasta otra, que mida correctamente longitudes, áreas, volúmenes, etc.; es decir que ejecute tareas matemáticas que suponen el dominio de los procedimientos usuales que se pueden desarrollar de acuerdo con rutinas secuenciadas. El aprendizaje de procedimientos o "modos de saber hacer" es muy importante en el currículo ya que éstos facilitan aplicaciones de las matemáticas en la vida cotidiana.

En muchas de las actividades de la vida diaria requerimos de los procedimientos, y el no manejarlos correctamente puede tener repercusiones de orden social, como lo veremos en los siguientes ejemplos:

- Si un ingeniero se equivoca en los cálculos para diseñar un puente, ya sea porque no oprimió la tecla correspondiente o porque confundió los ceros en el orden de magnitud, el puente puede quedar mal construido y se puede caer, debido a que falló un procedimiento.

- El antibiótico que se le debe dar a un niño generalmente se calcula por libra o por kilogramo de peso; solamente por confundir las libras con los kilogramos se puede cometer un error muy grave. Otra vez falló un procedimiento.

- Para llevar el saldo de nuestra cuenta corriente necesitamos efectuar cálculos, y si éstos no se hacen correctamente, podemos tener la sorpresa de "estar descuadrados" y tener una cantidad de dinero menor de la que creíamos, porque nos equivocamos en una resta, o porque se nos olvidó sumar el 1 que llevábamos, es decir porque falló un procedimiento.

Bajo el nombre de procedimientos nos estamos refiriendo a los conocimentos en cuanto a actuaciones, a las destrezas, estrategias, métodos, técnicas, usos y aplicaciones diversas, resaltando en el alumno la capacidad de enfocar y resolver las propias actuaciones de manera cada vez más hábil e independiente, más estratégica y eficaz, con prontitud, precisión y exactitud.

En general, en el currículo de matemática se han entendido los procedimientos como métodos de cálculo o algoritmos (conjunto de pasos bien especificados que llevan a un resultado preciso, y que estaban ligados en su mayoría a elaboraciones sintácticas de las expresiones simbólicas del lenguaje matemático). Hay otros aspectos del currículo que también son procedimientos, por ejemplo las construcciones geométricas como trazar una perpendicular a una recta dada por uno de sus puntos o bisecar un ángulo.

El aprendizaje de procedimientos o "modos de saber hacer" es muy importante en el currículo ya que éstos facilitan aplicaciones de las matemáticas en la vida cotidiana.

Los procedimientos son de índole y generalidad muy diversa. Para dar una visión de éstos presentamos algunas categorías que se han elaborado, sin el ánimo de hacer clasificaciones estrictas.

Algunos autores distinguen varios grupos de procedimientos según el campo de las matemáticas escolares en el que operan, así se pueden clasificar en: aritméticos, geométricos, métricos, estadísticos, analíticos, etcétera.

Luis Rico en su artículo "Consideraciones sobre el currículo escolar de matemáticas"[35] describe los procedimientos aritméticos, métricos, y geométricos como sigue:

Los procedimientos de tipo aritmético son aquéllos necesarios para un correcto dominio del sistema de numeración decimal y de las cuatro operaciones básicas. Entre los más destacados podemos señalar la lectura y escritura de números, el cálculo mental con dígitos y algunos números de dos cifras, el cálculo con lápiz y papel y el empleo de la calculadora.

Los procedimientos de tipo métrico son los necesarios para emplear correctamente los aparatos de medida más comunes de las magnitudes longitud, tiempo, amplitud, capacidad, peso y superficie. También se incluye aquí el dominio del sistema métrico decimal.

Los procedimientos de tipo geométrico son las rutinas para construir un modelo de un concepto geométrico, para manipularlo o para hacer una representación del mismo en el plano. También se incluye el dominio y empleo correcto de determinados convenios para expresar relaciones entre conceptos geométricos.

También describe unos procedimientos relacionados con gráficas y representación que se desarrollan en los distintos campos de las matemáticas. Cuando se hace una representación lineal de los números, cuando se emplea una gráfica para expresar una relación entre dos variables, o cuando se simboliza una fracción sobre una figura se están aplicando procedimientos de tipo gráfico, que suponen el empleo de determinados convenios para dar una imagen visual de un concepto o una relación.

Los procedimientos analíticos tienen que ver con "álgebra", "funciones" y "cálculo diferencial e integral". Algunos ejemplos de este tipo de procedimientos son: modelar situaciones de cambio a través de las funciones, las gráficas y las tablas; traducir de una a otra de las distintas representaciones de una función; resolver ecuaciones; comprender y hallar las tasas de inflación, los intereses en un préstamo, etc.

El TIMSS [36] en su propuesta de Currículo de Matemáticas, dentro de la componente de procesos de pensamiento u operaciones intelectuales del hacer matemáticas, considera los procedimientos de rutina bajo las siguientes categorías:

- Usar equipos: usar instrumentos como reglas, transportadores, etc., y usar calculadoras y computadores.
- Ejecutar procedimientos de rutina como los siguientes:
  - *** Calcular.** Efectuar una o más operaciones para llegar a un resultado. Incluye identificar una operación o un método apropiado; predecir el efecto de una operación o método; calcular sin ayuda de calculadora, usando un algoritmo conocido; calcular con ayuda de calculadora; calcular usando fórmulas (por ejemplo, hallar la media); calcular usando resultados de una simulación (por ejemplo encontrar una probabilidad basándose en un experimento simulado); calcular usando inferencias y propiedades de un modelo (por ejemplo, hallar una probabilidad usando un modelo simple de probabilidad).
  - **Graficar.** construir gráficas mediante uno o más cálculos, utilizando puntos o propiedades conocidas del objeto que se va a representar; o construirlas usando calculadoras gráficas o microcomputadores.
  - **Transformar.** Transformar un objeto matemático aplicando una transformación formal para obtener un nuevo objeto matemático. Incluye transformar sintéticamente (por ejemplo, identificar el resultado de hacer una rotación específica a una figura geométrica dada); transformar analíticamente (por ejemplo, identificar una figura en el plano coordenado o un gráfico que resulte de hacer una traslación específica a una figura dada); transformar a través de matrices; transformar a través de manipulaciones algebraicas (por ejemplo, obtener una nueva ecuación equivalente a una ecuación dada a partir de la manipulación algebraica); transformar mediante una función (por ejemplo obtener un nuevo punto, una nueva función a través de la composición con otra función).
  - **Medir.** Incluye medir algún aspecto de un objeto físico, de una figura geométrica o de un dibujo ya sea con unidades estándar o no estándar; identificar atributos medibles de un objeto físico o figura; seleccionar una unidad apropiada para una medición específica; seleccionar una herramienta apropiada para una medición específica; seleccionar un grado de precisión apropiado para una medición dada.

> "Aunque es importante que los alumnos sepan cómo llevar a cabo un procedimiento matemático de forma fiable y eficaz, el conocimiento procesual implica mucho más que la simple puesta en práctica.
>
> Los alumnos deben saber cuándo aplicarlos, por qué funcionan, y cómo verificar que las respuestas que ofrecen son correctas; también deben entender los conceptos sobre los que se apoya un proceso y la lógica que lo sustenta. El conocimiento procesual implica así mismo la capacidad de diferenciar los procediminentos que funcionan de los que no funcionan, y la capacidad de modificarlos o de crear otros nuevos. Es necesario animar a los estudiantes a que reconozcan la naturaleza y el papel que juegan los procedimientos dentro de las matemáticas; es decir, deben reconocer que los procedimientos son creados o generados como herramientas que satisfagan unas necesidades concretas de forma eficaz, y por consiguiente se pueden ampliar o modificar para que se adecúen a situaciones nuevas" [37].

La idea principal al verificar los resultados de un procedimiento, es que los estudiantes sean capaces de hacerlo por ellos mismos en lugar de confiar en la respuesta del texto o en la verificación que haga el profesor. Resulta especialmente importante la situación en que un alumno descubre que una respuesta es falsa después de comprobarla y por tanto repasa la ejecución del procedimiento original. Por ejemplo, la mayoría de los alumnos tiene problemas con los algoritmos de la resta, sobre todo cuando hay ceros intermedios, en este caso es conveniente enseñarles varias formas de probar esta operación, crear el hábito de devolverse, de revisar, de no creerse que el algoritmo está bien hecho y no confiar tanto en la calculadora cuando la utilice.

Otro aspecto importante de los procedimientos es esa capacidad para ver qué tipo de respuesta se necesita para resolver un problema, es decir, si es exacta o aproximada, lo cual determinaría el tipo de algoritmo que debe usarse.

Es necesario enfatizar en que el aprendizaje de los procedimientos no debe descuidar el conocimiento conceptual al que está ligado. Por ejemplo, si el alumno no entiende el concepto de máximo común divisor, difícilmente va a inventar, modificar o ampliar un procedimiento para hallarlo.

Los Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática (NCTM, 1989) presentan algunos indicadores de que los estudiantes comprenden la naturaleza y el papel de los procedimientos, que pueden dar pautas a los docentes sobre cómo va el aprendizaje de los procedimientos de los alumnos.

Estos son:

- ¿Llegan a ver los alumnos que los procedimientos se generan con un propósito o para satisfacer una necesidad concreta?
- ¿Valoran los alumnos la participación en la generación o ampliación de procedimientos?
- Cuando los alumnos no recuerdan un procedimiento determinado, ¿intentan reconstruirlo o generar uno nuevo, en vez de buscar ayuda para recordar el que han olvidado?
- ¿Los alumnos ven que un procedimiento alternativo puede satisfacer la misma necesidad?
- ¿Juzgan el mérito relativo de los procedimientos alternativos con base en la eficacia que demuestren?
- Cuando se presenta un procedimiento nuevo,
- ¿Intentan los alumnos ver qué sentido tiene la secuencia en que suceden los diferentes pasos?
- ¿Se preguntan qué lógica tiene esa secuencia de pasos?
- ¿Se preguntan por qué un determinado procedimiento da el resultado que se buscaba?
- ¿Tratan de verificar los resultados?

---

35. Publicado por la Revista EMA (Una Empresa Docente), Vol. 1, N° 14. 1995, págs. 4-24.

36. Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias (TIMSS).

37. Op. cit., pág. 235.

2. Referentes Curriculares

2.5 Contexto para la evaluación

La nueva ley de educación introduce un cambio sustancial en el sistema educativo colombiano, exigiendo que la evaluación sea cualitativa. Aquí nos parece necesario precisar que lo cualitativo no excluye lo cuantitativo; por el contrario, lo primero incluye lo segundo, cuando es posible cuantificar. Lo que ocurre es que, en general, no es posible cuantificar fenómenos no objetivizables como la comprensión o la inteligencia.

La evaluación cualitativa debe ser formativa, continua, sistemática y flexible, centrada en el propósito de producir y recoger información necesaria sobre los procesos de enseñanza-aprendizaje que tienen lugar en el aula y por fuera de ella.

El papel de los docentes, la institución y la familia consiste en interpretar y valorar las informaciones obtenidas para tomar decisiones encaminadas a la cualificación de los aprendizajes de los alumnos y de las estrategias de enseñanza utilizadas. En todos los casos, el propósito fundamental consistirá en que la mayoría de los alumnos alcancen los objetivos generales y específicos previstos en la Ley general de la educación colombiana y en los proyectos educativos de las instituciones y los logros que subyacen en los indicadores propuestos en la resolución 2343 de 1996.

2.5 Contexto para la evaluación

2.5.1 Orientaciones para la evaluación

Toda evaluación educativa es un juicio en donde se comparan los propósitos y deseos con la realidad que ofrecen los procesos, de aquí que la evaluación debe ser más una reflexión que un instrumento de medición para poner etiquetas a los individuos; lo que no excluye el reconocimiento de las diferencias individuales.

Aunque la evaluación debe incluir la adquisición de informaciones, importa más el ejercicio de competencias o formas de actuación que puedan ser nombradas como características del pensamiento matemático en general, y lógico en particular, además de las actitudes de los estudiantes. Con este punto de vista interesa observar los cambios de los alumnos desde sus estados iniciales de conocimiento y actuación (evaluación diagnóstica), pasando por el análisis de los comportamientos y logros durante los procesos de enseñanza-aprendizaje (evaluación formativa) hasta llegar a algún estado final transitorio (evaluación sumativa). En todos los casos la evaluación deberá ser secuencial.

Un estado final transitorio puede referirse a la culminación del trabajo en una unidad didáctica, o a un período de tiempo escolar (tres meses, seis meses, un año, tres años, etc.). Aquí se toman las decisiones sobre los estudiantes y los ajustes que sean necesarios para continuar con el plan de trabajo. Por ejemplo, programas especiales de apoyo para uno, varios o todos los estudiantes; orientaciones para el alumno y para la familia; modificaciones en las didácticas, mejoras en el uso de medios, etc. Es muy conveniente que en la evaluación de los estados finales transitorios participen otros profesores del área, para introducir una mejor objetividad en los juicios de valor.

El significado positivo y "sano" de una evaluación cualitativa radica en la intención de interpretar, con más precisión, el complejo proceso del aprendizaje significativo. Esto requiere tener en cuenta, con prioridad, los comportamientos y los procedimientos, las respuestas consideradas como válidas por los diferentes sectores de la cultura.

Evaluar el estado cognoscitivo y afectivo del estudiante, frente a un área del conocimiento, significa considerar todos aquellos elementos necesarios para diagnosticar los estados del aprendizaje, los factores formativos y los logros alcanzados, de acuerdo con los propósitos y las estrategias de intervención utilizadas durante el proceso educativo.

Se debe evaluar continuamente al estudiante en comportamientos que muestren su trabajo cotidiano: su actitud, su dedicación, su interés, su participación, su capacidad de diferenciación en algún área o asignatura particular, su habilidad para asimilar y comprender informaciones y procedimientos, su refinamiento progresivo en los métodos para conocer, para analizar, crear y resolver problemas, y su inventiva o tendencia a buscar nuevos métodos o respuestas para las situaciones. Lo anterior incluye elementos tan variados como:

- Las concepciones de los alumnos sobre los conceptos.
- Los cambios que se presentan en las concepciones mediante la participación activa de los estudiantes durante la construcción de los conocimientos.
- La comprensión de los conocimientos básicos en un momento dado.
- El estado de conceptualización alcanzado frente a los saberes formales.
- Las formas de comunicación de concepciones y conceptos.
- La capacidad para aplicar los conocimientos.
- La capacidad para interpretar, plantear y resolver problemas.
- Las estrategias y procedimientos utilizados para plantear y resolver problemas.
- Los estilos de trabajo: solitario y colectivo.
- La adquisición de destrezas.
- La participación individual en tareas colectivas.
- El interés por ampliar los conocimientos discutidos en el aula.
- La capacidad de lectura y escritura de temas relacionados con el área.
- La capacidad de reflexionar, críticamente, sobre lo que se aprende, lee o escribe.

Toda evaluación educativa es un juicio en donde se comparan los propósitos y deseos con la realidad que ofrecen los procesos, de aquí que la evaluación debe ser más una reflexión que un instrumento de medición para poner etiquetas a los individuos; lo que no excluye el reconocimiento de las diferencias individuales.

2.5 Contexto para la evaluación

2.5.2 Elementos para la evaluación de logros formativos y cognitivos

Un elemento importante a tener en cuenta es la diferenciación entre las respuestas de los estudiantes y las soluciones. Las primeras son una especie de acuerdo del sujeto con él mismo, las segundas pertenecen a los saberes formales. Con estas connotaciones, no existen respuestas equivocadas desde el punto de vista del sujeto, pero sí lo pueden estar desde el saber formal o desde el pensamiento de la cultura aceptada. Parte importante del trabajo docente consiste en lograr que las respuestas de los estudiantes sean confrontadas con las soluciones, sobre todo en aquellos casos donde no es posible aceptar, razonablemente, las respuestas como soluciones. Es el caso de los saberes matemáticos que todo estudiante requiere conocer para interactuar en el entorno socio-cultural que le corresponde.

El conocer las soluciones es parte fundamental de la formación cultural. No de otra manera podrá alguien comunicarse con el resto de personas informadas en un campo específico. Ninguna revolución pedagógica podrá, éticamente, llegar a aceptar todas las respuestas como válidas. Muy distinta esta posición de aquella que niega la posibilidad de respuestas nuevas o del planteamiento de nuevas teorías que, además, siempre y en todos los campos, son el resultado crítico y creativo a partir de un conocimiento en el saber tradicional.

La evaluación debe interpretarse en todos los sentidos y direcciones: las respuestas de los estudiantes también están evaluando los currículos, los docentes y las estrategias de trabajo o sus ejecuciones.

No tiene sentido estar buscando o esperando fórmulas para la evaluación cualitativa; es mejor asumir una mirada de experto sensible frente a cada saber o interés formativo: cada docente, y cada grupo de docentes, podrá responsablemente reconocer que un saber o un comportamiento pueden ser aceptados como alcanzados por el estudiante.

Es tan grave reconocer como logro aquello que no se ha logrado, como negar lo que se ha adquirido.

Más que pensar en una nota, siempre difícil de sustentar como indicadora de la calidad de un aprendizaje, debe pensarse en la coherencia entre las concepciones de los estudiantes y los conceptos de los saberes formales, y entre los propósitos diseñados para la formación y los logros alcanzados.

2.5 Contexto para la evaluación

2.5.3 Lecturas de los indicadores de logros curriculares

Los indicadores de logros presentados por un estudiante desde una situación problema pueden originar, para distintos observadores, hipótesis diferentes acerca del estado de algunos procesos en el desarrollo de un conocimiento básico salvo el caso en que dichos observadores tengan los mismos referentes teóricos para analizarlos. Esta lectura dependerá en gran parte del interés o del énfasis particular sobre el cual recaiga la observación. Una vez determinados estos comportamientos específicos, la atención puede centrarse en algunos tipos especiales de indicadores.

Teniendo en cuenta las diferencias entre comprensión o significación de conceptos, ejercitación-aplicación y resolución de problemas no triviales, se presentan a continuación unas categorías generales que faciliten una diferenciación de los comportamientos matemáticos, una vez se determinen, en cada caso, los comportamientos específicos que van a ser observados.

Indicadores de significación y orientaciones para observarlos

Se refieren, por una parte, a las concepciones que muestran los alumnos frente a los conceptos, fenómenos o situación problema y, por otra, a los conceptos tal y como son aceptados en el saber matemático bajo consideración.

Buscando una mayor precisión de los logros cognoscitivos y formativos se ofrecen, a continuación unas ideas para diferenciar las respuestas inmediatas de las reflexivas, de manera que se facilite el reconocimiento de cambios cualitativos en este indicador.

Cuando se inicia el proceso de intervención pedagógica, buscando las respuestas que informen sobre las concepciones que tienen los alumnos sobre un concepto o situación particular, es conveniente distinguir las respuestas inmediatas o “irreflexivas” de aquellas que se dan luego de un momento de reflexión. Las inmediatas son las respuestas que no requieren ningún esfuerzo para presentarse, situación que puede originarse en dos estados diferentes:

a) El estudiante ha logrado una comprensión relativamente clara sobre el tema en cuestión y no requiere, por el momento, una mayor reflexión sobre él. Éste es el estado ideal para los logros de la acción educativa.

b) El estudiante posee una concepción no elaborada sobre el tema. Situación que debe orientar la intervención del docente para romper este estado de equilibrio defectuoso motivando al estudiante, mediante refutaciones o confrontaciones, a asumir una actitud crítica y reflexiva que le permita modificar o sustituir sus concepciones.

En ambos casos es necesario intervenir planteando problemas que ofrezcan nuevos interrogantes; de este modo los estudiantes del estado a) podrán ampliar y profundizar en sus conocimientos, habilidades y destrezas, y b) disponer de un espacio que los interese y habitúe en el estudio analítico y sistemático.

El docente interpreta el estado del alumno a través de las respuestas (¿cómo abordan los ejercicios y los temas planteados?), por las preguntas que se les hacen respecto a la comprensión de los problemas que van a resolver, por la manera de escribir sus trabajos y por sus actitudes para realizar ejercicios, problemas y trabajos: ¿Es pasivo?, ¿activo?, ¿indiferente?, ¿sistemático?, ¿constante?, ¿curioso?, frente al tema en cuestión.

Indicadores de ejercitación y aplicación, y orientaciones para observarlos

Se refieren a las posibilidades para realizar actividades que exijan aplicar las concepciones o los conceptos que poseen los alumnos. Se incluyen aquí la ejercitación de algoritmos de operaciones y relaciones y la solución de problemas de rutina y de problemas prototipo.

Una vez se ha logrado un estado de comprensión conceptual es conveniente, cada que sea posible, aplicarlo en situaciones particulares, fundamentalmente con dos propósitos:

a) La cualificación de la comprensión, puesto que los problemas y ejercicios, relacionados con los conceptos son contextos que exigen precisiones y relaciones más detalladas, tanto analíticas como sintéticas.

b) La verificación de relaciones y procedimientos de solución de problemas. En el proceso de construcción significativa de nociones matemáticas se imponen relaciones de tipo empírico o cercanas a la experimentación, sólo que, además de objetos o fenómenos físicos, se trabaja con símbolos y relaciones entre ellos.

Existen ejercicios y aplicaciones como simples rutinas, en donde se desarrollan unas reglas rígidas para los algoritmos. Así por ejemplo, cuando se suma, resta, multiplica y divide, o cuando se calcula un área o un volumen; pero también existen aquéllos en donde es necesario escoger y aplicar inteligentemente determinado algoritmo en lugar de otro. Por ejemplo, un niño puede resolver, inicialmente, un problema de multiplicación usando sumas o uno de división usando restas, hasta que descubra el más apropiado.

Otra consideración a tener en cuenta para los ejercicios tiene que ver con la secuencia de los pasos y la escritura adecuada de ellos. Para la mayoría de los algoritmos matemáticos es más clara una escritura vertical que una escritura horizontal. Piénsese en la solución de ecuaciones, en donde una escritura horizontal facilita errores con el signo de la igualdad.

Muchos ejercicios permiten establecer estados de complejidad creciente, por abstracción y generalización, lo que puede servir de motivación para las ampliaciones y profundizaciones conceptuales.

Finalmente, cuando la ejercitación o aplicación se realiza conscientemente, la mente aprende a trabajar con más rapidez, logrando las automatizaciones necesarias, antes del uso de calculadoras o computadoras.

Indicadores de comunicación y orientaciones para observarlos

Se refieren a las formas y procesos comunicativos (estilos de razonamiento) que usan o pueden usar los alumnos: matemática verbal, escrita, icónica y simbólica.

Las diferentes formas comunicativas-verbales, escritas de todo tipo, gestuales y motrices- son los indicadores básicos para analizar los comportamientos cognoscitivos de los niños y los jóvenes. En otras palabras, la comunicación es el espacio más importante para trabajar con los niños y para promover la cualificación de sus actos. La importancia que tienen las conductas [38] del relato para hacer que la comunicación con el niño se transforme en un mediador más eficaz, puede analizarse así:

Comunicación antes de la actividad

Consiste en buscar la anticipación de los resultados a obtener por las acciones sobre objetos concretos o simbólicos. De esta manera se pueden conocer las concepciones que poseen los estudiantes, el modo como aplican sus conocimientos y las estrategias que utilizan para resolver problemas. Esta comunicación es fundamental para la movilización de los comportamientos matemáticos de tipo inductivo, como los que tienen que ver con la capacidad de plantear conjeturas y descubrir fórmulas o leyes generales.

Comunicación durante la actividad

Cualquiera sea la situación diseñada para iniciar la interacción con los niños y jóvenes, es conveniente incitarlos para que expliquen lo que están haciendo y pensando y, si es posible, que "justifiquen" de alguna manera el porqué o para qué lo están haciendo. Lo anterior tiene importancia cognoscitiva puesto que el estudiante es promovido a pensar en la acción o en el acontecimiento; pero también el maestro o el acompañante disponen de indicadores que informan sobre lo que éste está comprendiendo y de las calidades de la comprensión. Por ejemplo: un niño de cuatro años llena durante una sesión de trabajo varias hojas en blanco dibujando rayas con lápices de colores. Al preguntarle por lo que hay representado en cada hoja responde que en una está la piscina, en otra el mar, en otra el río y en otra solamente rayas. Todas las hojas "parecían" representar lo mismo: un "enredo" de rayas, pero aunque se mezclaran las hojas, el niño era capaz de volver a reconocerlas diferenciándolas con exactitud.

La maestra había dado la siguiente instrucción para la actividad: "vamos a usar los colores para pintar rayitas y dibujar el agua". El niño pintó rayitas y lugares que conocía, donde había agua.

Sin indagar al niño sobre el significado de sus acciones, no se hubiera descubierto lo que estaba pensando.

Más aún, en la hoja de rayas que llamó "río", algunas rayas significaban árboles; en la hoja que llamó piscina –casi las mismas rayas– significaban el edificio donde estaba la piscina.

A menudo la comunicación verbal con un niño es difícil o incompleta. A veces se limitan a responder señalando con el dedo, o volviendo a ejecutar la acción para dar cuenta de una representación, pero lo importante es que responda de alguna manera.

Comunicación posterior a la actividad

Se trata de promover en los estudiantes la evocación de las actividades realizadas en el pasado; así se facilitan los recuerdos de los aprendizajes logrados, sobre todo de aquellos que fueron resultado de la superación de conflictos. Ellos regresan a la memoria consciente luego de participar en las complejas interacciones cerebrales, donde posiblemente han ocurrido asociaciones, olvidos, cernidos y cambios de significación.

Examinando la evocación de las actividades pasadas, el maestro puede analizar el estado de los aprendizajes, las posibles lagunas o las cualificaciones ocurridas con el paso del tiempo. Simultáneamente, el estudiante reflexiona y se esfuerza por recordar los significados de sus acciones, facilitándose así la aplicación de las competencias adquiridas para la solución de nuevos problemas.

De aquí se desprende una estrategia importante para el maestro: todos aquellos conocimientos considerados como fundamentales o básicos, deben ser evocados en diferentes intervalos de tiempo.

Competencia escrita

Para la competencia escrita, observando cómo usa y representa las relaciones matemáticas, cómo codifica las expresiones del lenguaje común que deben ser expresadas en lenguaje matemático y, también, la lectura en lenguaje común de las expresiones dadas en lenguaje matemático.

Para las representaciones icónicas debe analizarse sí éstas si se parecen a lo que se quiere representar. Se debe tener cuidado con la interpretación de estas representaciones, puesto que muchos problemas son imputables a la percepción y no a las aptitudes matemáticas. Así por ejemplo, es posible que el concepto de triángulo equilátero esté conceptualmente bien construido, pero el estudiante tenga problemas para dibujarlo, tal y como lo piensa. Esto nos lleva a utilizar las conductas del relato para descubrir lo que el estudiante representó o quiere representar; sin embargo, también es posible que el estudiante esté representando bien aun cuando el concepto esté mal comprendido; por ejemplo, pensando y representando el cuadrado como un rectángulo.

Para las representaciones gráficas y diagramales interesa descubrir el sentido que le dan los estudiantes y el uso que pueden hacer de ellas para resumir procesos o estados, en donde el concepto de variable esté presente (tanto la variable algebraica como la variable de los fenómenos físicos).

En cuanto a la comunicación de las relaciones simbólicas matemáticas, desde la comprensión de los estudiantes, queremos interpretar estas relaciones como aquéllas en donde los signos representan lo que libremente escogemos para representar. Así, por ejemplo, en la expresión "$x \in A$" la letra x se refiere a cualquiera de los elementos del conjunto "A", y la letra A se refiere al conjunto que quisimos nombrar con esa letra.

Indicadores de estrategias para la solución de problemas

Se refieren al reconocimiento de los distintos procedimientos de actuación que siguen los niños cuando resuelven o plantean problemas… "Las matemáticas crecen a través de la mejora permanente de conjeturas, por especulación y crítica, por la lógica de las demostraciones y las refutaciones (Lakatos, 1976)[39].

Específicamente, deben existir situaciones problema que motiven y desencadenen razonamientos hacia la construcción de hipótesis y la intuición de conjeturas, además de incentivar los procesos de verificación y demostración.

Para Santos Trigo:[40]

> Una caracterización de las matemáticas en términos de la resolución de problemas refleja una dirección que cuestiona la aceptación de las matemáticas como un conjunto de hechos, algoritmos, procedimientos, o reglas que el estudiante tiene que memorizar o ejercitar. En su lugar los estudiantes participan activamente en el desarrollo de las ideas matemáticas, los problemas son definidos con menos precisión, y donde el aprendizaje se relaciona con la práctica de desarrollar matemáticas. Es decir, el estudiante aprende matemáticas al ser inmerso en un medio similar al de la gente que hace matemáticas… Concebir a las matemáticas como una disciplina didáctica implica reformular tanto los contenidos como la forma de su enseñanza. Es importante reducir el énfasis de los cálculos aritméticos, especialmente la memorización de algoritmos o fórmulas, y dar más énfasis al significado de las operaciones, a la evaluación razonable de los resultados y a la selección de procedimientos y estrategias adecuadas.

Algunas Heurísticas que aparecen comúnmente en la solución de problemas:

1. Descubrir los datos y las relaciones explícitas entre ellos.
2. Descubrir los datos y las relaciones implícitas.
3. Crear posibilidades para modificar y simplificar el problema.
4. Construir modelos gráficos o simbólicos para las relaciones entre los datos.
5. Plantear conjeturas utilizando procesos inductivos numéricos o gráficos.
6. Identificar el problema particular dentro de otro más general.
7. Diseñar o utilizar un problema más abstracto que el presentado, pero que lo incluya como particular.
8. Razonar recurriendo a analogías.

Las dificultades que muestren los estudiantes para plantear o resolver un problema deben ser precisadas y clasificadas, ya se trate de dificultades en la comprensión, en el conocimiento matemático, en los procesos para aplicar algoritmos o en las actitudes sociales, culturales o emocionales, hacia la matemática o el enunciado del problema. Es muy común la tendencia a dar respuestas estereotipadas; es decir, responder con el esquema disponible, aunque el problema no esté relacionado con el esquema. También es frecuente la incapacidad de modificar las formas perceptivas existentes, para buscar una representación más adecuada.

Orientación para observar las competencias específicas en la solución de problemas

LA CAPACIDAD DE MODELACIÓN

Para entender un concepto matemático o para resolver un problema es necesario, a partir de la comprensión inicial, realizar alguna representación de las relaciones que tienen que ver con el concepto o con el problema: Los símbolos de los números y sus relaciones tienen sentido sólo cuando representan una multiplicidad de significados [41]; no cuando son, simplemente, el resultado de un aprendizaje mecánico. En este contexto, toda representación simbólica matemática es un modelo, cuando se conoce con sentido. Así, por ejemplo:

El símbolo 4 es el cardinal de todas las colecciones que poseen cuatro elementos, pero también es resultado de infinidad de operaciones y relaciones, como: 6 - 2, + 12/3 $\sqrt{16}$, $4<a \wedge 4>a \Rightarrow 4 = a$, etc.

La ecuación de la recta $y = mx$ es un modelo para todas las rectas que pasan por el origen de coordenadas *y*, a la vez, es un modelo para infinidad de fenómenos cuyas magnitudes se pueden aproximar con las variables x e y (en relación directamente proporcional).

5 es modelo para todos los ordenamientos posibles de 5 elementos.

$a \in x$ se refiere a cualquiera de los elementos de un conjunto.

$y = ax^2 + bx + c$ es el modelo de todas las parábolas y de los fenómenos cuya relación entre variables se puede expresar, aproximativamente, con esa ecuación.

En general, puede afirmarse que las matemáticas construyen modelos para plantear relaciones entre objetos de cualquier naturaleza.

Indicadores de comportamientos creativos

Se utilizan para registrar, en las situaciones de enseñanza y aprendizaje, las respuestas, las preguntas y los procedimientos no esperados, pero que indican una actitud innovadora o de descubrimiento de relaciones matemáticas. La respuesta creativa será aquella que aparece como nueva para el sujeto que la produce; puede considerarse como un descubrimiento, en unos casos, o como una invención, en otros. Según Ernst (1991) [42] " resolver un problema, en el sentido usual del término, implica encontrar un camino hacia un destino determinado, en una investigación lo que constituye el objetivo es el viaje, y no el destino" (p. 9). Ambos comportamientos nos interesan para observar la creatividad.

Escribe Julio César Penagos C. [43]: "creatividad y solución de problemas no son sinónimos. La sola visión de un problema ya es un acto creativo. En cambio su solución puede ser producto de habilidades técnicas. El ver el problema significa integrar, ver, asociar donde otros no han visto. En este acto de darse cuenta, intervienen componentes actitudinales, sociales y afectivos entre otros".

---

38. P. Ernst, The fhilosopy of mathematics education, The Palmer Press, 1991.

39. Op. cit.

40. Luz Manuel Santos Trigo, "La naturaleza de las matemáticas y sus implicaciones didácticas", Mathesis 9, 1993, págs 426-427.

41. Para comprender mejor el significado del concepto sentido numérico se puede consultar el artículo de Ana Celia Castiblanco P., "Sistemas Numéricos" Grupo de Investigación Pedagógica, MEN, Santa Fe de Bogotá, 1997.

42. Citado por Paulo Abrantes: "El papel de la resolución de problemas en un contexto de renovación curricular", en Revista de Didáctica de las Matemáticas número 8, año III, abril de 1996.

43. Julio César Penagos Corzo, "Creación o resolución de problemas, Internet, 1997.

2.5 Contexto para la evaluación

2.5.4 Sobre los registros de evaluación - algunas reflexiones

Acogiendo las indicaciones generales que presenta la ley, todas las instituciones tienen libertad para desarrollar sus proyectos educativos, y por tanto para seleccionar sus estrategias y didácticas de enseñanza, lo que implica hacer explícitos los estados de eficiencia esperados en cada caso. El currículo real deberá estar en concordancia con el currículo formal descrito en el proyecto educativo y relacionado, en este caso, con el programa de acompañamiento para el aprendizaje de las matemáticas.

Concepto de suficiencia

Cuando se utiliza el número (3 sobre 5 ó 6 sobre10) para certificar la aprobación en la evaluación cuantitativa se empobrece el sentido y significado de la evaluación.

La aprobación debe significar un buen punto de llegada, una suficiencia aceptable, tanto para el individuo como para los observadores externos, sobre los saberes y comportamientos básicos que se consideren como indispensables en la cultura de todo estudiante. El estado de suficiencia señalará, de la manera más precisa posible, aquellos logros fundamentales e indispensables para la continuación del proceso educativo en el área de las matemáticas. Sólo que ellos se podrán alcanzar con ritmos y tiempos diferentes, durante el proceso educativo, dentro de una programación curricular flexible y dinámica.

Supongamos entonces que se fija una franja para interpretar la suficiencia. Franja que puede ser tan específica como lo permitan las condiciones particulares de los docentes, los alumnos y la institución. Para el caso de nuestras categorías de indicadores, la franja, en cada caso, estará conformada por el conjunto de indicadores específicos que hemos precisado durante la planeación. Así por ejemplo, la franja de la significación estará limitada inferiormente por las concepciones de los alumnos, y superiormente por las significaciones exigidas por las matemáticas, en las condiciones de contexto, previamente aceptadas. En otras palabras, el límite superior señala el estado de los logros esperados, después de la intervención educativa y en un momento dado del proceso.

Los criterios para definir y aceptar una franja de suficiencia pueden considerarse como instrumento de registro de la evaluación. Desde la planeación inicial del área se suponen unos límites superiores que determinan la franja inicial que da cuenta de las pretensiones institucionales; sin embargo, es muy probable que esta franja deba ajustarse a las condiciones reales de los estudiantes, puesto que toda franja deberá ser el resultado, lo más fiel posible, de los logros alcanzados por la mayoría de los estudiantes pertenecientes a un grupo. La franja inicial servirá, entonces, como un referente para la evaluación de los planes institucionales de trabajo y para efectuar los ajustes necesarios.

Es posible utilizar los números con un interés cualitativo, veamos: una franja es funcional si la mayoría de los estudiantes de un grupo alcanzan los logros superiores fijados en ella; pero, ¿qué significado tiene el concepto de mayoría? Si suponemos, con el profesor Gastón Mialaret (1977) [44], que un 10% de los estudiantes muestra mejores aptitudes que la mayoría, y, similarmente, un 10% se comporta por debajo de ella, es lógico definir el 80% (o un valor cercano al 80%) como referencia de mayoría.

Por otra parte, el porcentaje alto lo único que está significando es el estado de la mayoría de los estudiantes de un grupo particular, sin confrontarlo con la franja ideal o la de otros grupos o instituciones. Confrontación que puede ser muy positiva e inclusive necesaria para las mejoras institucionales.

Para cada una de las categorías de indicadores podemos definir su respectiva franja de suficiencia, con los elementos específicos que se tendrán en cuenta en ella.

Ahora analizaremos los registros del docente, sobre el grupo y sobre cada estudiante, y los registros de auto evaluación de los alumnos.

Indicadores de suficiencia para el grupo

Con base en la lista de indicadores que espera el docente para cada temática particular deberá interpretarlos con base en el comportamiento general del grupo. De este modo podrá reconocer cuáles logros fueron alcanzados por un porcentaje representativo de los estudiantes analizados. Un porcentaje inferior al 80% debería originar modificaciones, sustituciones o ajustes en las temáticas o en las didácticas que se estén utilizando. Con este criterio estaríamos garantizando unos logros básicos para la mayoría de los estudiantes, a la vez que se realiza una auto evaluación de la acción educativa planeada. Es posible, por ejemplo, que el docente considere que la comprensión básica de los conceptos se ajusta al indicador, pero la ejercitación y la aplicación de ellos no es todavía suficiente; se esperaría, entonces, una acción didáctica encaminada a superar este estado. En cualquier caso, estamos proponiendo la fijación de unas franjas o espacios que informan sobre el estado general del grupo frente a indicadores generales de comportamientos matemáticos esperados.

Indicadores de suficiencia individual

A partir del estado del grupo, pueden registrarse los comportamientos diferenciales de los estudiantes frente a ese estado, ya sea por deficiencia o por una eficiencia superior a la esperada. En el primer caso se originan las acciones de apoyo individual con miras a lograr la superación de los obstáculos. En el segundo caso, las acciones irán encaminadas a ofrecer oportunidades para la ampliación y profundización de los aprendizajes y de los comportamientos formativos en el área.

El profesor redacta un informe sobre la franja lograda por la mayoría, y sus características. Además, en la lista del profesor aparecerán informes como éstos: el alumno A requiere actividades complementarias para comprender los diferentes significados del concepto de fracción. El alumno B sólo requiere una mayor ejercitación en los ejercicios de suma y resta con fracciones, etcétera.

Nuestro propósito general consiste en trabajar para que todos los estudiantes logren llegar, aun con ritmos y actividades diferentes, a la franja de suficiencia en donde se encuentre la mayoría del grupo. Desde el punto de vista institucional, el propósito debería ser la cualificación de su franja particular de eficiencia.

Los registros de autoevaluación de los alumnos

Los cuadernos de los alumnos son importantes en la medida que informan, al mismo estudiante, de su proceso de aprendizaje. Ellos mismos deberán registrar sus aciertos, los errores y las superaciones que van logrando frente al plan de trabajo, que también deben conocer con anterioridad. Nunca deberán utilizarse los errores de los estudiantes para reprimirlos; por el contrario, deberán aprender a utilizar el error o la insuficiencia como un medio y un desafío para la cualificación personal. Es ideal llegar a una situación donde los mismos alumnos informan al docente sobre lo que piensan son sus carencias y necesidades más importantes para lograr un buen estado cognitivo o formativo. Además, esta información puede ser útil para reorientar el trabajo del docente.

Un caso de evaluación de logros en el concepto de número

Interpretaremos simultáneamente dos situaciones: los comportamientos del grupo y los comportamientos individuales. Para ambos suponemos una estrategia y una didáctica, previamente definida, para y con los estudiantes. Supongamos, por ejemplo, que nos proponemos trabajar el concepto de número con niños que inician su conocimiento de la aritmética (grados 1 y 2); es decir, la iniciación de los niños en el concepto y las operaciones básicas asociadas con él.

La estrategia, en términos de propósitos, consistirá en:

a) Reconocer las concepciones sobre el número, construidas por el niño a través de sus experiencias.

b) Presentar nuevas experiencias que faciliten la cualificación de las concepciones.

c) Aportar elementos de la cultura matemática, con procedimientos que ayuden a la significación.

d) Promover la ejercitación y aplicación de relaciones numéricas.

e) Analizar diferentes formas comunicativas para el concepto de número.

f) Ayudar a tomar conciencia sobre el uso y necesidad del concepto de número.

g) Promover comportamientos analíticos y sintéticos en situaciones concretas relacionadas con el concepto de número.

Indicadores de significación

Concepciones de los alumnos:

- ¿Qué significa para los niños contar?
- ¿Hasta dónde cuentan consecutivamente?
- ¿Reconocen los símbolos numéricos que nombran?
- ¿Perciben, como un todo, colecciones con 2, 3, 4 ó 5 elementos?
- ¿Pueden contar colecciones de 6, 7, 8, 9 y 10 elementos estableciendo la correspondencia biunívoca, ordenada, entre los números y los objetos?
- ¿Qué significan para los niños las palabras cambio y sustitución?, por ejemplo, en el uso del dinero y con material multibase.

Indicadores de comunicación

¿Cómo responde el niño a las preguntas anteriores? ¿Responde verbalmente, con acciones o con señales?

¿Sabe escribir los numerales? ¿Cómo los escribe? (Magnitud, dirección y sentido de los numerales).

¿Puede asignar el numeral a la colección y la colección al numeral?

¿Es capaz de explicar verbalmente lo que hace?

Significaciones matemáticas

Durante el proceso de intervención pedagógica, para lograr comportamientos matemáticos y aprendizajes básicos, observamos y registramos si el niño o niña puede:

- Usar los códigos numéricos para contar y ordenar colecciones de objetos.
- Construir colecciones, con un número dado de elementos, a partir de colecciones con menos elementos que la inicial.
- Encontrar todas las subcolecciones que originan, aditivamente, una colección dada.
- Descomponer una colección en subcolecciones (2, 3 o más subcolecciones).
- Contar en el ábaco aplicando el principio de sustitución en base 10.
- Reconocer progresivamente el significado de las unidades de diferente orden.
- Generalizar esquemas aditivos; por ejemplo, del esquema aditivo básico 8+3 =11 derivar esquemas como: 18 +3, 28+3, …

Indicadores de ejercitación

· Actividades para realizar cálculos. Primero con referentes concretos como palillos, aros, cubitos, las regletas de Cuisenaire o cualquier material fácilmente contable, y luego únicamente mentales.

Una lista básica de actividades puede ser la siguiente:

Sumas y restas cuyo total sea =< 10

Diferencia entre 2 números menores que 10.

Diferencia entre un número menor que 10 y el 10.

- Resolver problemas prototipo de aplicación del esquema aditivo con los diez primeros números, fundamentalmente los que relacionan suma con resta.
- Cálculo de sumas "pasando" por el diez, es decir, aplicando el principio de sustitución.
- Representar cardinales, de 2, 3, o más cifras, en el ábaco.
- A partir de representaciones en el ábaco interpretar los cardinales correspondientes.

Indicadores de estrategias para la solución de problemas

Se plantean problemas a los niños, como los que a continuación se presentan, para interpretar los heurísticos que utilizan: descomponer el problema en subproblemas, hacer dibujos, reducir el problema a otro problema conocido, buscar casos particulares, razonar por analogía, etcétera.

Actividades para interpretar los indicadores

Ejemplos para el análisis sobre la comprensión del conteo:

- Dado un número fijo de barras (2 ó 3) y un número fijo de aros (3 ó 4), encontrar todos los números que se pueden representar en el ábaco. Leerlos y escribirlos.
- Realizar adiciones en el ábaco, sin aplicar el principio de sustitución (cambio).
- Realizar adiciones en el ábaco, aplicando el principio de sustitución.
- Realizar sustracciones en el ábaco, sin aplicar el principio de sustitución.
- Realizar sustracciones en el ábaco, aplicando el principio de sustitución.
- Representar las adiciones usando los símbolos matemáticos.
- Representar las sustracciones usando los símbolos matemáticos.

Indicadores de respuestas creativas

Las respuestas creativas de los niños que se encuentran en los primeros grados escolares aparecen cuando se les plantean preguntas o actividades abiertas, pero que de alguna manera los orientan a la acción. Los ejemplos siguientes dan significado a la interpretación que estamos haciendo de estas respuestas:

Ejemplo 1: a unas niñas de tercer grado (8-9 años) se les propone pintar todas las banderas que puedan, usando tres colores (amarillo, azul y rojo).

La mayoría de las niñas pintaron el modelo de bandera que conocían (véase figura 1). Sus respuestas variaron entre 3 y 6 posibilidades; pero dos niñas asumieron la multiplicidad de formas para las banderas, representando, una, más de 20 casos, y la otra más de 32. Ambas interrumpieron las representaciones porque no terminarían nunca (véanse figuras 2 y 3).

Figura 1: Modelo clásico sobre el cual combinaban los colores.

Figura 2: Algunas modificaciones al modelo clásico, agregándole círculos de diferentes colores y combinando colores en los rectángulos base.

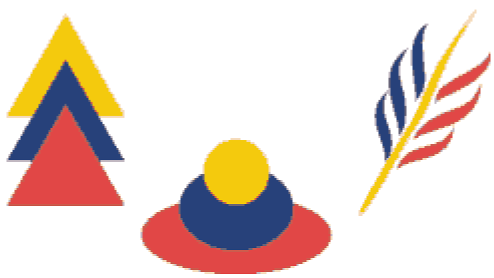


Figura 3: Cambio en las formas básicas, incluyendo representaciones de animales, y en las particiones para distribuir colores.

Ejemplo 2: Se propone a niños del grado 2º que hagan operaciones con los números 1,2,3, …, 10, 11, 12 para obtener el número 6.

La mayoría sólo utiliza sumas con números menores que 6; pero algunos niños utilizan los números mayores que 6 y realizan las restas correspondientes. En el análisis de las respuestas encontramos algunas representaciones gráficas en donde los elementos sobrantes se tachaban, dejando sólo 6.

Ejemplo 3: Los niños de grado 2º usaban el geoplano y una pita de longitud fija para representar todos los rectángulos que se les ocurriera, tratando de que descubrieran el de mayor área. Un niño dice: "el más grande es éste -y señala el cuadrado- porque es grande por todos los lados".

---

44. Gastón Mialaret, Las matemáticas cómo se aprenden, cómo se enseñan, Pablo del Río, Madrid, 1977.

3. Elementos conceptuales en la formación de maestros

La formación de maestros debe descansar no sólo sobre una base metodológica firme que garantice la obtención de la cobertura y calidad apropiada, sino que ésta debe subyacer sobre una propuesta conceptual que permita a los maestros desplegar la educación que necesita la sociedad colombiana del nuevo milenio.

El campo disciplinar del maestro de matemáticas, lo podemos identificar con aquel que llamaremos matemática escolar. Esto quiere decir que el campo disciplinar del maestro no es la matemática como disciplina científica, aunque éste debe ser su pilar fundamental. Lo que por el momento entenderemos por matemática escolar es una manera de comprender los conocimientos y saberes matemáticos que circulan en los contextos escolares, en tanto que estos saberes y conocimientos tienen el saber científico como punto de mira, pero en su circular por la escuela no lo hacen necesariamente con el carácter formal y abstracto desde el saber científico, sino que está cargado de significados e intenciones provenientes de contextos sociales y culturales en que está inmerso el contexto escolar [45].

Esta matemática pone en interacción tres elementos clave: las matemáticas como disciplina científica, el alumno y el maestro. A continuación se realizarán algunas consideraciones sobre los dos primeros elementos dejando para el final el tercero.

Las matemáticas. Hablar de las matemáticas es hablar del trabajo matemático y de cómo es que éstas se producen. Es decir, las matemáticas no son solamente el cuerpo teórico acumulado a través de la historia. Son también la actividad de quienes las piensan bien sea como objeto de reflexión (objeto) o como instrumento útil (herramienta). Ningún conocimiento matemático se produce terminado desde el primer momento. El matemático en su quehacer comete errores, elabora hipótesis, realiza inducciones, generalizaciones, etc., y posteriormente cuando juzga que ha encontrado un resultado digno de ser "comunicado", elige, del gran laberinto de sus reflexiones, aquello que es comunicable y "susceptible de convertirse en un saber nuevo e interesante para los demás" (Brousseau, 1994). Esto implica ocultar todo rastro de su origen y génesis, para poder presentarlo de acuerdo con las reglas permitidas: el lenguaje axiomático deductivo. Esto es, "el autor despersonaliza, descontextualiza y destemporaliza lo más posible sus resultados" (Brousseau,1994). Pero esto no es garantía de que el nuevo conocimiento será aceptado como válido, para ello debe pasar la crítica del resto de la comunidad de matemáticos del momento, quienes lo reformulan, lo generalizan, o incluso lo destruyen.

Esta génesis del conocimiento matemático permanece oculta tras los resultados que nosotros conocemos, y sólo tras un estudio histórico y epistemológico puede ser sacada a la luz pública.

Este saber científico, como se dijo al hablar del sistema didáctico, va cambiando de contexto en etapas sucesivas hasta transformarse en matemática escolar.

Los alumnos. Los alumnos deben realizar una actividad muy específica en el ámbito escolar, la cual debe ser propiciada por el profesor.

> El trabajo intelectual del alumno debe por momentos ser comparable a esta actividad científica. Saber matemáticas no es solamente aprender definiciones y teoremas para reconocer la ocasión de utilizarlas y aplicarlas; sabemos bien que hacer matemáticas implica que uno se ocupe de problemas, pero a veces se olvida que resolver un problema no es más que parte del trabajo; encontrar buenas preguntas es tan importante como encontrarles solución. Una buena reproducción por parte del alumno de una actividad científica exigirá que él actúe, formule, observe, construya modelos, lenguajes, conceptos, teorías, que los intercambie con otros, que reconozca las que están conformes con la cultura, que tome las que le son útiles, etcétera.
>
> Para hacer posible semejante actividad, el profesor debe imaginar y proponer a los alumnos situaciones que puedan vivir y en las que los conocimientos van a aparecer como la solución óptima y descubrible en los problemas planteados". (Brousseau, 1994).

Pero también es cierto que dar respuesta a estas preguntas es asunto de arduos trabajos de investigación, que permitan definir con claridad las perspectivas de la educación matemática en el país.

---

45. En este sentido la teoría de la transposición didáctica de Yves Chevallard da cuenta de las tensiones con respecto a las decisiones que se toman, desde la matemática disciplinaria, en la elección de los conocimientos matemáticos objeto de enseñanza y la forma como deben ser presentados en el contexto escolar. Estas tensiones no sólo están determinadas por cuestiones científicas, sino también de orden político, económico y socio-cultural en general.

3. Elementos conceptuales en la formación de maestros

3.1 El conocimiento curricular como elemento del conocimiento profesional del profesor de matemáticas

Cuando los formuladores de política educativa mediante la Ley 115 de 1994 y sus desarrollos reglamentarios dejan en manos de los educadores "la conformación de una comunidad pedagógica investigadora y constructora del currículo, el diseño, el desarrollo, seguimiento, evaluación y retroalimentación del mismo y su adopción como parte del proyecto educativo institucional" (art. 4o. resolución 2343 junio de 1996), exige de los docentes un rol de mayor responsabilidad, muy particularmente en lo que se refiere al manejo curricular.

Sin embargo, algunos especialistas coinciden en afirmar que para asumir dicha responsabilidad se requiere un saber específico "Que supone el grado más alto de integración explícita de los saberes vinculados a la actividad profesional" (Porland). En consecuencia, tamaña responsabilidad deberá ser implementada mediante procesos que lleven, tanto al maestro en ejercicio como a los estudiantes de las facultades de educación, a reconocer en el saber curricular un elemento básico para su desempeño profesional, dado que es éste el instrumento que permite en últimas planificar una formación (L. Rico).

Aunque es suficientemente reconocido que en el diseño y desarrollo curricular son más los hechos que permanecen implícitos (ocultos), también se hace necesario explicitar de la manera más clara y precisa el conjunto de principios que orientan las prácticas pedagógicas de la actividad matemática escolar. Principios que hagan referencia a la puesta en práctica de las concepciones sobre los procesos de enseñanza de las matemáticas, de los procesos de aprendizaje y de la naturaleza de los mismos, vinculados al reconocimiento de la práctica y experiencia cuyos pesos tienden a decidir los parámetros bajo los cuales se realiza la actividad escolar.

Ese proceso de explicitación de principios estará en relación con unos elementos concretos y determinantes del mismo, pues el formulador de currículo deberá tener en cuenta la caracterización de las personas a quienes se pretende formar, el tipo de formación que se quiere proporcionar, formación que dependerá básicamente de las tendencias universales reflejadas en las exigencias de tipo social hechas a los contenidos, a los procedimientos y en general a la actividad escolar.

De igual forma, el educador matemático al formular el currículo deberá tener en cuenta una caracterización de la institución en la cual se desarrolla su actividad, la cual determinará las dinámicas tanto académicas como de socialización en las cuales se pretende la satisfacción de formación, establecidas previamente.

3. Elementos conceptuales en la formación de maestros

3.2 Sobre la estructura

El reconocimiento de lo arriba expuesto nos lleva a considerar una disposición de los distintos factores que constituyen o determinan un currículo –en este caso el de cada institución– y que deberán ser tenidos en cuenta a la hora de abordar su formulación.

Dichos factores serán los siguientes: (Activ. Mat. Escolar).

- La enunciación de los principios.
- Los propósitos de formación, por nivel y ciclo.
- Los criterios para selección de contenidos.

- Los criterios para secuenciar los contenidos.
- La organización espacio/temporal de los contenidos que bien puede ser por asignaturas, por módulos (monográficos), por proyectos pedagógicos, por campos conceptuales, etcétera.
- Los criterios para la selección de metodologías y recursos didácticos.

Todo lo anterior vinculado a una conceptualización de la Actividad Matemática Escolar, como determinante funcional y punto de referencia.

Sin embargo, esta estructura estará sujeta a una interpretación más rigurosa de lo establecido en los fundamentos de los indicadores de logros, en los indicadores mismos y, en éstos, los lineamientos y su supuesto curricular. En particular con lo que tiene que ver con el elemento cualitativo.

---

3. Elementos conceptuales en la formación de maestros

3.3 Hacia una política de formación de maestros

La puesta en escena de lineamientos tal como están pensados, así como el espíritu de la Ley General de Educación, implican que las relaciones entre el maestro, los alumnos, la matemática escolar y la institución sean replanteadas. Este replanteamiento exige nuevos roles tanto de la institución como de maestros y alumnos, los cuales deben ser definidos por los maestros, a partir de las condiciones que creen las instituciones. En consecuencia, la formación de maestros debe constituirse en el espacio óptimo para generar este tipo de reflexiones.

Con base en la anterior perspectiva, desde el Ministerio de Educación Nacional se deben trazar una serie de lineamientos en cuanto a la formación de maestros que garanticen que éste sea efectivamente uno de los espacios a través de los cuales se puedan generar las transformaciones profundas que necesita la educación en nuestro país.

En consecuencia, la formación de maestros deberá ser entendida como un proceso a través del cual un sujeto se hace profesional en un campo disciplinar específico: la Educación Matemática.

El desarrollo de este proceso contempla las siguientes fases:

- Profesionalización
- Actualización
- Innovación
- Investigación

La profesionalización es el espacio a través del cual se accede a un saber diferenciado, y a un saber hacer asociado a este campo.

Ésta es asumida desde distintos escenarios según corresponda al nivel de apropiación de la disciplina: Normales superiores (como iniciación en el campo), las licenciaturas (como el ámbito natural de la profesionalización), y las especializaciones (como el lugar desde donde se conceptualiza el campo desde un saber específico).

La formación de maestros deberá ser entendida como un proceso a través del cual un sujeto se hace profesional en un campo disciplinar específico: la Educación Matemática.

Esta profesionalización debe ser orientada desde líneas de investigación que conceptualicen la naturaleza interdisciplinaria del campo de la Educación Matemática, fundamentalmente desde la perspectiva de la matemática escolar. Esto implica que desde la formación inicial en las Normales, hasta el término de la profesionalización con la especialización, el futuro maestro debe recibir una formación intrínsecamente interdisciplinaria distinta a la que se ha venido realizando: una sumatoria de cursos que el alumno debe integrar por su propia cuenta y riesgo. Así pues, por ejemplo, un curso de cálculo debe incluir su historia, su epistemología, su didáctica en el sentido moderno del deber ser el resultado de la indagación e investigación de un equipo de trabajo interdisciplinario y, por qué no, interinstitucional. De la misma manera la articulación entre las universidades o institutos de educación y las Normales deberá hacerse desde el punto de vista interdisciplinario, y por ende a partir de dichas líneas de investigación.

La actualización, por su parte, debe ser entendida como un aspecto inherente al aspecto profesional del docente a través del cual reflexiona y conceptualiza el nuevo conocimiento que ingresa al campo disciplinar. Ahora bien, se entiende que así como la búsqueda de la actualización es parte del quehacer profesional del maestro, del mismo modo las universidades deben generar mecanismos que permitan al maestro interesado alcanzar dicha actualización. Por ejemplo, a través de programas y no cursos, de pasantías de investigación, publicaciones periódicas, impulsar la formación de redes de educadores matemáticos, congresos, talleres y seminarios, tanto regionales como nacionales e internacionales, etc., pero además las instituciones deben permitir al maestro acceder a dicha actualización a través de su patrocinio e incentivo. Por ejemplo, el Ministerio de Educación Nacional podría reglamentar de manera clara cómo el maestro puede acceder a una comisión para realizar una pasantía académica, o cuándo y para qué un año sabático, o financiar publicaciones y conformación de redes de educadores, etc. En síntesis, la educación debe estar engranada en un sistema complejo que permita al maestro distintas vías para alcanzarlo.

La innovación se entiende como el acto a través del cual el maestro reflexiona sistemáticamente sobre su práctica, y a la luz de las teorías del campo disciplinar de su profesión produce un conocimiento sobre su quehacer profesional que puede ser socializado por distintas vías y estrategias de comunicación. Así pues la innovación está estrechamente ligada a la actualización en tanto que el ideal es que todo acto de actualización genere innovaciones.

Además, de la misma manera que la actualización, la innovación también debe estar articulada en un sistema logístico y de incentivos que permitan al maestro desarrollar su práctica innovativa: un sistema de actualización ágil y eficiente, financiación para llevar a cabo sus experiencias, en sentido económico, como la generación de un escalafón para el maestro innovador, paralelo al del escalafón docente nacional, el cual genere bonificaciones por el tiempo determinado, etcétera.

Es importante destacar que la conformación de redes de educadores matemáticos se constituye en el medio más eficaz para garantizar tanto la actualización como la innovación, y desde esta óptica tanto universidades como Ministerio deben encaminar esfuerzos para lograr su conformación y consolidación.

Por último, la investigación debe ser entendida como el lugar desde el cual se produce conocimiento en el campo disciplinar. Esta parte de la formación profesional empieza en las maestrías y se consolida en los doctorados, desde donde se construye la comunidad científica de educadores matemáticos en el país. Nótese que en este momento se está haciendo una distinción entre maestro investigador e innovador, en tanto que son actividades claramente diferenciadas, pero igualmente válidas ante la comunidad académica. Ahora bien, no se trata de que un maestro no pueda realizar investigaciones, se trata de que mientras se dedique a realizar la investigación, su rol es el de investigador y no el de maestro. En síntesis, un maestro puede ser investigador, lo que no puede es ser ambas cosas a la vez.

Es de anotar que la formación de maestros adquiere un doble carácter: uno como estrategia para asegurar, conceptualizar y dinamizar el proceso de implementación de los lineamientos curriculares en el área de las matemáticas; el otro es el aspecto académico que comporta la formación de los maestros. Se trata de implementar un proceso académico investigativo que permite garantizar la profesionalización de los docentes.

Los maestros. Los planteamientos en los dos apartados anteriores determinan el papel del maestro: éste debe recontextualizar y repersonalizar los conocimientos matemáticos. Así pues el trabajo del maestro es en cierta medida comparable con el trabajo de un investigador ya que debe determinar el tipo de actividad a proponer al alumno, de tal manera que cada conocimiento surja de la respuesta a un problema que el alumno se ha planteado y del cual ha formulado su solución.

> El profesor debe simular en su clase una microsociedad científica, si se quiere que los conocimientos sean medios económicos para plantear buenos problemas y para solucionar debates, si se quiere que los lenguajes sean medios de dominar situaciones de formulación y que las demostraciones sean pruebas.
>
> Pero debe también dar a los alumnos los medios para encontrar en esta historia particular que les ha hecho vivir, lo que es el saber cultural y comunicable que se ha querido enseñarles. Los alumnos deben a su turno redescontextualizar y redespersonalizar su saber de manera que puedan identificar su

producción con el saber que se utiliza en la comunidad científica y cultural de su época.

Claro está, se trata de una simulación que no es "verdadera" actividad científica, así como el conocimiento presentado de manera axiomática no es el "verdadero" conocimiento (Brousseau, 1994).

Pero dado que esta actividad no se realiza por fuera de las exigencias sociales, entonces la actividad del maestro y alumno está determinada y condicionada, de tal forma que los contenidos que se enseñan, la manera como se presentan , los objetivos que se persiguen al llevarlos a la escuela, etc., son el resultado de dichas exigencias.

Así pues, las matemáticas que circulan en la escuela, responden a preguntas tales como: ¿Qué tipo de educación matemática queremos en nuestra sociedad?, ¿cuáles son los fines sociales de la educación matemática en nuestra población?, ¿cómo debemos presentar las matemáticas en la escuela para que se alcancen los fines sociales propuestos?

Dar respuesta a preguntas como las anteriores implica reflexiones de tipo filosófico, epistemológico, ético, político, didáctico, pedagógico, etc. La formación de maestros debe plantearse sobre la base de este tipo de reflexiones, de tal manera que el maestro adquiera herramientas conceptuales que le permitan dar las respuestas necesarias a su trabajo en el aula.

Bibliografía

ABRANTES, Paulo, "El papel de la resolución de problemas en un contexto de Innovación Curricular", en: Revista Uno Nº 8, Año III, Grao Educación de Serveis Pedagógics, Barcelona, 1996.

AEBLI, Hans, Doce formas básicas de enseñar, Madrid, Nacea S. A. de Ediciones, 1988.

ALCARATE G., Carmen y DEULOFEU, Jordi, Funciones y gráficas. Madrid, Editorial Síntesis, 1990.

ALCINA, Claudi y otros, Invitación a la didáctica de la geometría, Madrid, Síntesis 1989.

ALEKSANDROV, A. D., y otros, La matemática: su contenido, métodos y significado, Vol. 1, Madrid, Alianza, 1993.

ARCA, M.; GUIDONI P. y MAZZOLI P., Enseñar ciencia, Barcelona, Ediciones Paidós, 1990.

BARBIN E. y DOUADY, R., "La enseñanza de las matemáticas: puntos de referencia entre saberes, programas y prácticas", 1996.

BORASSI, R., Exploring Mathematics trough the Analysis of Errors. For the learning of Mathematics, Vol. 7, 1987, págs. 2-9.

BROUSSEAU, Guy, "Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas", en: Recherches en didactique des mathematiques, Vol. 7, Nº 2, 1986, págs. 33-115.

BROWN, Margaret, "Number Operations" en: K. Hart, Children's Understanding of Mathematics, 11 -16. London, John Murray, 1981

BRUNER, Jerome, Acción, pensamiento y lenguaje, Madrid, Alianza Editorial, 1989.

CAROZZI DE ROJO, M.; CHEMELLO, G. y otros, Didácticas especiales. Estado del debate, Buenos Aires, Aique Grupo Editor S.A., 1992.

CARR, Wilfred y KEMMIS, Stephen, Teoría crítica de la enseñanza, Barcelona, Ediciones Martínez Roca, 1988.

CASTAÑO, Jorge, "Simulación del lenguaje logo en el geoplano", Santafé de Bogotá, Ministerio de Educación Nacional (Baúl Jaibaná), 1997.

.... "Los multicubos y sus múltiples usos", Santafé de Bogotá, Ministerio de Educación Nacional (Baúl Jaibaná), 1997.

.... "Lo numérico", en: revista La Alegría de Enseñar. Hojas pedagógicas, Santafé de Bogotá, Fundación FES, 1995-1997.

CATALÁ, Claudi y otros, Invitación a la didáctica de la geometría, Madrid, Editorial Síntesis, 1987.

CLEMENTS, Douglas y BATTISTA Michael "Geometry and spacial reasoning", en: Grouws, D.A. (Ed), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, New York, MacMillan, 1992.

CHEVALLARD, Yves, Transposición didáctica, Buenos Aires, Aique, 1997.

DAVIS, Philip y HERSH, Reuben, La experiencia matemática, Barcelona, Labor, 1988.

DEPARTMENT FOR EDUCATION, Mathematics in the National Curriculum, London.

DE LANGE, Jan, Mathematics, Insight and Meaning. Vakgroep Onderzoek Wiskundeonderwijs en Onderwijs computer centrum, Utrecht, 1987.

DICKSON, L.; BROWN, M. y GIBSON, O., El aprendizaje de las matemáticas, Barcelona, Editorial Labor, S.A., 1991.

DOU, Alberto, Fundamentos de la matemática, Barcelona, Labor, 1970.

DUHALDE, M. y GONZÁLEZ, M., Encuentros cercanos con la matemática, Buenos Aires, Aique, 1996.

EISNER, Elliot, Procesos cognitivos y Currículo, Barcelona, Ediciones Martínez Roca, 1987.

ELLIOTT, Portia y KENNEY Margaret, Communication in Mathematics, K-12 and Beyond, Reston, VA: NCTM, 1996.

ERNEST, Paul, The Philosophy of Mathematics Education, Basingstoke, The Falmer Press, Pont-A-Mousson: Topiques éditions, 1991.

GRAVEMEIJER, Koeno, Developing Realistic Mathematics Education. CIP GEGEVENS KONINKLIJKE BIBLIOTHEEK, Den Haag, 1994.

GIL D. y DE GUZMÁN, M., Enseñanza de las ciencias y la matemática. Tendencias e innovaciones, Madrid, Editorial Popular S.A., 1993.

HART, K. M. y otros, Children's Mathematical Frameworks 8-13: A Study of Classroom Teaching, London, Edited by David C. Johnson, 1989.

JOHSUA, S. y DUPIN, J., Introduction a la didactique des sciences et des mathematiques, Paris, PUF, 1993.

KILPATRICK, J.; RICO, L., y SIERRA, M., Educación matemática e investigación, Madrid, Editorial Síntesis, S.A., 1992.

LABINOWICZ, Ed., Introducción a Piaget. Pensamiento, aprendizaje, enseñanza, México, Fondo Educativo Interamericano, 1982.

LENOIR, Yves, Los componentes de la relación educativa. Conferencia en Foro y Feria Educativa Nacional, Santafé de Bogotá, MEN.

LLINARES, Salvador y SANCHEZ, María Victoria (Editores), Teoría y práctica en educación matemática, Sevilla, Ediciones Alfar, 1990.

.... La formación de profesores de matemáticas, Sevilla, Copyur S.L., 1991.

MARTÍNEZ, Ángel y otros, Metodología activa y lúdica de la geometría, Madrid, Editorial Síntesis, 1987.

MASON, J. y otros, Pensar matemáticamente, Barcelona, Editorial Labor, 1992.

MCINTOSH, A.; REYS, B. J. y REYS, R. E., A Proposed Framework for Examining Basic Number Sense. For the Learning of Mathematics 12, 3 (November 1992), FLM Publishing Association, White Rock, British Columbia, Canadá, 1992.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL, Marco general y propuesta de programa

curricular matemática. 9° grado, educación básica secundaria, Editorial Nueva Gente,

Santafé de Bogotá, 1991.

.... Propuesta de programa curricular para matemáticas: sexto grado y séptimo grado de educación básica, Santafé de Bogotá, Imprenta Nacional, 1988.

.... Propuesta de programa curricular para matemáticas: octavo grado de educación básica, Editorial Colombia Nueva LTDA., Santafé de Bogotá, 1990.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA, Diseño curricular base. Educación primaria. Madrid, 1989.

.... Diseño curricular base. Educación secundaria obligatoria. Madrid, 1989.

.... Bachillerato. Estructura y Contenidos, Madrid, 1991.

MORENO, Luis y WALDEGG, Guillermina, “Constructivismo y Educación Matemática”, en: Revista Educación matemática, Vol. 4, Nº 2, Grupo Editorial Iberoamérica, S.A, México D.F., 1992.

MORENO, Luis, “La educación matemática hoy”, en: Revista EMA, Vol. 2, Nº 2. Una Empresa Docente, Santafé de Bogotá, 1997.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática, Edición en castellano: Sociedad

Andaluza de Educación Matemática “THALES”, Sevilla, 1989.

NCTM, Professional Standards for teaching Mathematics, Reston, VA: NCTM, 1991.

NOVAK, Joseph y GOWIN, Bob, Aprendiendo a aprender, Barcelona, Ediciones Martínez Roca, 1988.

ORTON, Anthony, Didáctica de las matemáticas. Cuestiones, teoría y práctica en el aula, Madrid, Centro de Publicaciones del M.E.C. y Ediciones Morata, S.L., 1996.

POLYA, G., Como plantear y resolver problemas, México, Trillas, 1969.

PARRA, Cecilia y SAIZ, Irma (Compiladoras), Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones, Buenos Aires, Editorial Paidós, 1994.

PERKINS, David y otros, Enseñar a pensar, Barelona, Centro de publicaciones del M.E.C. y Ediciones Paidós Iberica, S.A., 1994.

PORTUGAIS, Jean, Didactique des Mathematiques et formation des enseignants, París, Peter Lang S.A., 1995.

RICO, Luis; CASTRO, E. y CASTRO, E., Fundamentos para una aritmética escolar, Madrid, Editorial Síntesis, 1987.

RICO, Luis, "Consideraciones sobre el currículo escolar de matemáticas", en: Revista EMA, Vol. I, Nº 1, Una Empresa Docente, Santafé de Bogotá, 1995.

SANTOS, Luz Manuel, "Resolución de problemas. El trabajo de Alan Schoenfeld: Una propuesta a Considerar en el Aprendizaje de las Matemáticas", en: Revista Educación Matemática, Vol. 4, Nº 2, México D. F., Grupo Editorial Iberoamérica, S.A., 1992.

.... "La naturaleza de las matemáticas y sus implicaciones didácticas", en: revista Mathesis, Vol. IX, Nº 4, México, 1993.

SCHOENFELD, Alan H.,"Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense making in Mathematics", en: GROUWS, D.A. (ed), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, New York, Macmillan, 1992, págs. 334-370.

.... Mathematical problem solving, Academic Prees, 1985.

SHAUGHNESSY, J. Michael. Research in probability and statistics: Reflections and Directions. En GROUWS, D.A. Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, New York, Macmillam, pp 465 - 490.

SOCAS R., Marín Manuel y otros, Iniciación al álgebra, Madrid, Editorial Síntesis, 1989.

SOWDER, Judith, "Estimation and number sense", en: GROUWS, D.A. (ed), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, New York, Macmillan, 1992, págs. 371-389.

.... Mental computation and number comparison: their roles in the development of number sense and computational estimation. J. Hiebert & M. Behr (Eds.), Number concepts and operations in the middle grades, Hillsdale, NJ: Lawrence Erilbaum, Reston, VA: NCTM, 1988, págs. 182-197.

VASCO, Carlos E., "Un nuevo enfoque para la didáctica de las matemáticas". volumen I y II, en: Serie Pedagogía y Currículo, Ministerio de Educación Nacional, Bogotá, 1994, pág. 187.

.... Sistemas métricos. El contructivismo genético, Bogotá, Imprenta Universidad Nacional, en prensa.

.... Sistemas de datos. El constructivismo genético, Bogotá, Imprenta Universidad Nacional, en prensa.

.... "Aspectos cualitativos de la medición en ciencias naturales".

.... El aprendizaje de las matemáticas elementales como un proceso culturalmente condicionado, Fondo Rotatorio de Publicaciones, Tunja, 1994.

.... "La educación matemática: una disciplina en formación", Matemáticas: Enseñanza universitaria, Vol. 3, Nº 2, Santafé de Bogotá, 1994.

ZULUAGA, Carlos, Gimnasia matemática, Fondo de publicaciones del Gimnasio Modenro, Santafé de Bogotá, 1996.