Estándares Básicos de Competencias en Mátemáticas

Potenciar el pensamiento matemático: ¡un reto escolar!

*El porqué de la formación **matemática***

Desde hace tres décadas, la comunidad colombiana de educadores matemáticos viene investigando, reflexionando y debatiendo sobre la formación matemática de los niños, niñas y jóvenes y sobre la manera como ésta puede contribuir más eficazmente a las grandes metas y propósitos de la educación actual. En este sentido, la educación matemática debe responder a nuevas demandas globales y nacionales, como las relacionadas con una educación para todos, la atención a la diversidad y a la interculturalidad y la formación de ciudadanos y ciudadanas con las competencias necesarias para el ejercicio de sus derechos y deberes democráticos. Para comprender mejor los cambios en la relación entre las metas de la educación matemática y los fines de la educación actual de cara al siglo XXI, a continuación se describen algunos cambios en las argumentaciones sobre la importancia de la formación matemática y su relación con las nuevas visiones de la naturaleza de las matemáticas.

Hace ya varios siglos que la contribución de las matemáticas a los fines de la educación no se pone en duda en ninguna parte del mundo. Ello, en primer lugar, por su papel en la cultura y la sociedad, en aspectos como las artes plásticas, la arquitectura, las grandes obras de ingeniería, la economía y el comercio; en segundo lugar, porque se las ha relacionado siempre con el desarrollo del pensamiento lógico y, finalmente, porque desde el comienzo de la Edad Moderna su conocimiento se ha considerado esencial para el desarrollo de la ciencia y la tecnología.

En Colombia, desde los inicios de la República hasta la década de los setenta, la contribución de la formación matemática a los fines generales de la educación se argumentó principalmente con base en las dos últimas razones de carácter personal y científico-técnico, a saber: por su relación con el desarrollo de las capacidades de razonamiento lógico, por el ejercicio de la abstracción, el rigor y la precisión, y por su aporte al desarrollo de la ciencia y la tecnología en el país. Estos fines estuvieron fuertemente condicionados por una visión de la naturaleza de las matemáticas como cuerpo estable e infalible de verdades absolutas, lo que condujo a suponer que sólo se requería estudiar, ejercitar y recordar un listado más o menos largo de contenidos matemáticos –hechos, definiciones, propiedades de objetos matemáticos, axiomas, teoremas y procedimientos algorítmicos– para formar a todos los estudiantes en el razonamiento lógico y en los conocimientos matemáticos.

Sin embargo, estos argumentos comenzaron a ser cuestionados, de un lado, porque el desarrollo del pensamiento lógico y la preparación para la ciencia y la tecnología no son tareas exclusivas de las matemáticas sino de todas las áreas de la Educación Básica y Media y, de otro, por el reconocimiento de tres factores adicionales que no se habían considerado anteriormente como prioritarios: la necesidad de una educación básica de calidad para todos los ciudadanos, el valor social ampliado de la formación matemática y el papel de las matemáticas en la consolidación de los valores democráticos.

El primero de ellos obedece al ideal de ofrecer a toda la población del país una educación básica masiva con equidad y calidad, lo que implica buscar también la integración social y la equidad en y a través de la educación matemática, es decir, formar en matemáticas a todo tipo de alumnos y alumnas. La posibilidad de esta formación ya no está dada –como sucedía en la primera mitad del Siglo XX– por el filtro social que limitaba mucho el número de estudiantes que accedían a la educación secundaria, sino que tiene que atender a toda la población juvenil, independientemente de su preparación adecuada o deficiente en las matemáticas de la Educación Básica Primaria y de su motivación o desmotivación por las mismas. Por ello, se hace necesario comenzar por la identificación del conocimiento matemático informal de los estudiantes en relación con las actividades prácticas de su entorno y admitir que el aprendizaje de las matemáticas no es una cuestión relacionada únicamente con aspectos cognitivos, sino que involucra factores de orden afectivo y social, vinculados con contextos de aprendizaje particulares. Estas consideraciones se amplían con la visión del carácter histórico y contingente de las matemáticas, consideradas ahora como un cuerpo de prácticas y de realizaciones conceptuales y lingüísticas que surgen ligadas a un contexto cultural e histórico concreto y que están en continua transformación y reconstrucción como otros cuerpos de prácticas y saberes. De esta forma se amplía la base argumentativa para relacionar las matemáticas con las finalidades culturalmente valoradas de la educación.

El segundo factor incorpora nuevas finalidades sociales a los propósitos de la formación matemática, las cuales se argumentan con las siguientes razones. La primera alude al carácter utilitario ampliado del conocimiento matemático, en tanto que el mundo social y laboral fuertemente tecnologizado del Siglo XXI requiere cada vez más de herramientas proporcionadas por las matemáticas –sin olvidar ni menospreciar los aportes de otras disciplinas como las ciencias naturales y sociales– y por las nuevas tecnologías, para lograr con ellas desempeños eficientes y creativos en muchas labores en las que antes no se requería más que de la aritmética elemental. La segunda razón alude al conocimiento matemático imprescindible y necesario en todo ciudadano para desempeñarse en forma activa y crítica en su vida social y política y para interpretar la información necesaria en la toma de decisiones.

Hace ya varios siglos que la contribución de las matemáticas a los fines de la educación no se pone en duda en ninguna parte del mundo.

El tercer factor está relacionado con la segunda razón arriba mencionada, pero va más allá, pues busca contribuir desde la educación matemática a la formación en los valores democráticos. Esto implica reconocer que hay distintos tipos de pensamiento lógico y matemático que se utilizan para tomar decisiones informadas, para proporcionar justificaciones razonables o refutar las aparentes y falaces y para ejercer la ciudadanía crítica, es decir, para participar en la preparación, discusión y toma de decisiones y para desarrollar acciones que colectivamente puedan transformar la sociedad. Este factor agrega a las demás funciones de la formación matemática una nueva función política: la preocupación por la formación en valores democráticos y por el ejercicio de la ciudadanía crítica. Por lo tanto, es necesario que en los procesos de enseñanza de las matemáticas se asuma la clase como una comunidad de aprendizaje donde docentes y estudiantes interactúan para construir y validar conocimiento, para ejercer la iniciativa y la crítica y para aplicar ese conocimiento en diversas situaciones y contextos. Para lograrlo hay que hacer énfasis en los actos comunicativos, de tal suerte que se le permita al grupo deliberar sobre las razones o la falta de ellas, sobre las conjeturas, opiniones o juicios y sobre las ventajas o desventajas de las posibles decisiones que deban tomarse dentro y fuera de la clase y que tengan resonancia colectiva.

Los tres factores antes descritos exigen reorganizaciones, redefiniciones y reestructuraciones de los procesos de enseñanza de las matemáticas. En primer lugar, se hace necesaria una nueva visión de las matemáticas como creación humana, resultado de la actividad de grupos culturales concretos (ubicados en una sociedad y en un periodo histórico determinado) y, por tanto, como una disciplina en desarrollo, provisoria, contingente y en constante cambio. Ello implica incorporar en los procesos de formación de los educandos una visión de las matemáticas como actividad humana culturalmente mediada y de incidencia en la vida social, cultural y política de los ciudadanos. En segundo lugar, se hace necesario también incorporar los fines políticos, sociales y culturales a la educación matemática, lo cual implica prioritariamente tomar en consideración el estado actual de la sociedad, sus tendencias de cambio y los futuros deseados hacia los cuales se orienta el proyecto educativo de las matemáticas. La incorporación de estos fines a la enseñanza de las matemáticas obliga a reconocer que ésta forma parte del sistema de valores compartidos, que tiene fundamentos éticos y que se incardina en una práctica social. Finalmente, se hace necesario pasar de una enseñanza orientada sólo hacia el logro de objetivos específicos relacionados con los contenidos del área y hacia la retención de dichos contenidos, a una enseñanza que se oriente a apoyar a los estudiantes en el desarrollo de competencias matemáticas, científicas, tecnológicas, lingüísticas y ciudadanas.

Así pues, los fines de tipo personal, cultural, social y político de la educación matemática, aunque plantean nuevos y difíciles problemas, abren nuevos horizontes y refuerzan las razones para justificar la contribución de la formación matemática a los fines de la educación.

Sobre la noción de competencia matemática

Sin utilizar todavía la conceptualización y la terminología actual de las competencias, la visión sobre las matemáticas escolares propuesta en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas[1] preparaba ya la transición hacia el dominio de las competencias al incorporar una consideración pragmática e instrumental del conocimiento matemático, en la cual se utilizaban los conceptos, proposiciones, sistemas y estructuras matemáticas como herramientas eficaces mediante las cuales se llevaban a la práctica determinados tipos de pensamiento lógico y matemático dentro y fuera de la institución educativa.

[1] Ministerio de Educación Nacional (1998). *Matemáticas. Lineamientos curriculares*. MEN. Bogotá.

También pueden reinterpretarse como potentes precursores del discurso actual sobre las competencias la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel[2], Novak y Gowin[3], y la de la enseñanza para la comprensión de Perkins, Gardner, Wiske y otros[4]. En la primera, la significatividad del aprendizaje no se reduce a un sentido personal de lo aprendido, sino que se extiende a su inserción en prácticas sociales con sentido, utilidad y eficacia. En la segunda, la comprensión se entiende explícitamente como relacionada con los desempeños de comprensión, que son actuaciones, actividades, tareas y proyectos en los cuales se muestra la comprensión adquirida y se consolida y profundiza la misma. En las dimensiones de la comprensión se incluye no sólo la más usual de los contenidos y sus redes conceptuales, sino que se proponen los aspectos relacionados con los métodos y técnicas, con las formas de expresar y comunicar lo comprendido y con la praxis cotidiana, profesional o científico-técnica en que se despliegue dicha comprensión. Todas estas dimensiones se articulan claramente con una noción amplia de competencia como conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, socioafectivas y psicomotoras apropiadamente relacionadas entre sí para facilitar el desempeño flexible, eficaz y con sentido de una actividad en contextos relativamente nuevos y retadores. Esta noción supera la más usual y restringida que describe la competencia como saber hacer en contexto en tareas y situaciones distintas de aquellas a las cuales se aprendió a responder en el aula de clase.

Por lo dicho anteriormente, se puede hablar del aprendizaje por competencias como un aprendizaje significativo y comprensivo. En la enseñanza enfocada a lograr este tipo de aprendizaje no se puede valorar apropiadamente el progreso en los niveles de una competencia si se piensa en ella en un sentido dicotómico (se tiene o no se tiene), sino que tal valoración debe entenderse como la posibilidad de determinar el nivel de desarrollo de cada competencia, en progresivo crecimiento y en forma relativa a los contextos institucionales en donde se desarrolla. Las competencias matemáticas no se alcanzan por generación espontánea, sino que requieren de ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problema significativas y comprensivas, que posibiliten avanzar a niveles de competencia más y más complejos.

*Las **competencias matemáticas** no se alcanzan por generación espontánea, sino que requieren de ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problema significativas y comprensivas, que posibiliten avanzar a niveles de competencia más y más complejos.*

La noción general de competencia ha venido siendo objeto de interés en muchas de las investigaciones y reflexiones que adelanta la comunidad de investigadores en educación matemática. Una síntesis apretada de los resultados de éstas permite precisar que –además de los aspectos que se acaban de mencionar– el sentido de la expresión *ser matemáticamente competente* está íntimamente relacionado con los fines de la educación matemática de todos los niveles educativos (lo cual ha sido tratado en el apartado anterior) y con la adopción de un modelo epistemológico sobre las propias matemáticas. La adopción de un modelo epistemológico coherente para dar sentido a la expresión *ser matemáticamente competente* requiere que los docentes, con base en las nuevas tendencias de la filosofía de las matemáticas, reflexionen, exploren y se apropien de supuestos sobre las matemáticas tales como:

- Las matemáticas son una actividad humana inserta en y condicionada por la cultura y por su historia, en la cual se utilizan distintos recursos lingüísticos y expresivos

2 Ausubel, D. P., Novak, J. D. y Hanesian, H. (1983). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo* (2a. ed.). Trillas. México.

3 Novak, J. D. y Gowin, B. (1988). *Aprendiendo a aprender*. Martínez Roca. Barcelona.

4 Wiske, M. S. (Comp.). (2003). *La enseñanza para la comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica*. Paidós. Buenos Aires, Barcelona, México. Ver también la guía para el docente: Blythe, T. (1999). *Enseñaza para la comprensión. Guía para el docente*. Paidós. Buenos Aires, Barcelona, México. El MEN también publicó dos volúmenes sobre el tema en el "Baúl Jaibaná": República de Colombia-Ministerio de Educación Nacional (1997). *Pequeños aprendices, grandes comprensiones* (Rosario Jaramillo Franco, Directora General de la Obra, 2 vols.). MEN. Bogotá.

para plantear y solucionar problemas tanto internos como externos a las matemáticas mismas. En la búsqueda de soluciones y respuestas a estos problemas surgen progresivamente técnicas, reglas y sus respectivas justificaciones, las cuales son socialmente decantadas y compartidas.

- Las matemáticas son también el resultado acumulado y sucesivamente reorganizado de la actividad de comunidades profesionales, resultado que se configura como un cuerpo de conocimientos (definiciones, axiomas, teoremas) que están lógicamente estructurados y justificados.

  Con base en estos supuestos se pueden distinguir dos facetas básicas del conocimiento matemático:

- La práctica, que expresa condiciones sociales de relación de la persona con su entorno, y contribuye a mejorar su calidad de vida y su desempeño como ciudadano.

- La formal, constituida por los sistemas matemáticos y sus justificaciones, la cual se expresa a través del lenguaje propio de las matemáticas en sus diversos registros de representación.

En el conocimiento matemático se han distinguido dos tipos básicos: el conocimiento conceptual y el conocimiento procedimental.

En el conocimiento matemático también se han distinguido dos tipos básicos: el conocimiento conceptual y el conocimiento procedimental. El primero está más cercano a la reflexión y se caracteriza por ser un conocimiento teórico, producido por la actividad cognitiva, muy rico en relaciones entre sus componentes y con otros conocimientos; tiene un carácter declarativo y se asocia con el *saber qué* y el *saber por qué*. Por su parte, el procedimental está más cercano a la acción y se relaciona con las técnicas y las estrategias para representar conceptos y para transformar dichas representaciones; con las habilidades y destrezas para elaborar, comparar y ejercitar algoritmos y para argumentar convincentemente. El conocimiento procedimental ayuda a la construcción y refinamiento del conocimiento conceptual y permite el uso eficaz, flexible y en contexto de los conceptos, proposiciones, teorías y modelos matemáticos; por tanto, está asociado con el saber cómo.

Estas dos facetas (práctica y formal) y estos dos tipos de conocimiento (conceptual y procedimental) señalan nuevos derroteros para aproximarse a una interpretación enriquecida de la expresión *ser matemáticamente competente*. Esta noción ampliada de competencia está relacionada con el *saber qué*, el *saber qué hacer* y el *saber cómo, cuándo* y *por qué* hacerlo. Por tanto, la precisión del sentido de estas expresiones implica una noción de competencia estrechamente ligada tanto al hacer como al comprender. Si bien es cierto que la sociedad reclama y valora el saber en acción o saber procedimental, también es cierto que la posibilidad de la acción reflexiva con carácter flexible, adaptable y generalizable exige estar acompañada de comprender qué se hace y por qué se hace y de las disposiciones y actitudes necesarias para querer hacerlo, sentirse bien haciéndolo y percibir las ocasiones de hacerlo.

Estas argumentaciones permiten precisar algunos procesos generales presentes en toda la actividad matemática que explicitan lo que significa ser *matemáticamente competente*:

- Formular, plantear, transformar y resolver problemas a partir de situaciones de la vida cotidiana, de las otras ciencias y de las matemáticas mismas. Ello requiere analizar la situación; identificar lo relevante en ella; establecer relaciones entre sus componentes y con situaciones semejantes; formarse modelos mentales de ella y representarlos externamente en distintos registros; formular distintos problemas, posibles preguntas y posibles respuestas que surjan a partir de ella. Este proceso general requiere del uso flexible de conceptos, procedimientos y diversos lenguajes para expresar las ideas matemáticas pertinentes y para formular, reformular, tratar y resolver los problemas asociados a dicha situación. Estas actividades también integran el razonamiento, en tanto exigen formular argumentos que justifiquen los análisis y procedimientos realizados y la validez de las soluciones propuestas.

- Utilizar diferentes registros de representación o sistemas de notación simbólica para crear, expresar y representar ideas matemáticas; para utilizar y transformar dichas representaciones y, con ellas, formular y sustentar puntos de vista. Es decir dominar con fluidez distintos recursos y registros del lenguaje cotidiano y de los distintos lenguajes matemáticos.

- Usar la argumentación, la prueba y la refutación, el ejemplo y el contraejemplo, como medios de validar y rechazar conjeturas, y avanzar en el camino hacia la demostración.

- Dominar procedimientos y algoritmos matemáticos y conocer cómo, cuándo y por qué usarlos de manera flexible y eficaz. Así se vincula la habilidad procedimental con la comprensión conceptual que fundamenta esos procedimientos.

Los cinco procesos generales de la actividad matemática

En la enumeración anterior se pueden ver con claridad –aunque en distinto orden– los cinco procesos generales que se contemplaron en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas: formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar, y formular comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos.

> *Los cinco procesos generales que se contemplaron en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas son: formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar, y formular comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos.*

En todas las áreas curriculares pueden considerarse procesos semejantes y en cada una de esas áreas estos procesos tienen peculiaridades distintas y deben superar obstáculos diferentes que dependen de la naturaleza de los saberes propios de la respectiva disciplina. En los apartados siguientes se hará mención de cada uno de esos procesos generales desde las particularidades presentes en la actividad matemática que ocurre en su enseñanza y en su aprendizaje. Debe aclararse, además, que esta clasificación en cinco procesos generales de la actividad matemática no pretende ser exhaustiva, es decir, que pueden darse otros procesos además de los enumerados, ni tampoco pretende ser disyunta, es decir, que existen traslapes y relaciones e interacciones múltiples entre ellos; en particular, como se verá a continuación, el proceso de formular y resolver problemas involucra todos los demás con distinta intensidad en sus diferentes momentos.

La formulación, tratamiento y resolución de problemas

Este es un proceso presente a lo largo de todas las actividades curriculares de matemáticas y no una actividad aislada y esporádica; más aún, podría convertirse en el principal eje organizador del currículo de matemáticas, porque las situaciones problema proporcionan el contexto inmediato en donde el quehacer matemático cobra sentido, en la medida en que las situaciones que se aborden estén ligadas a experiencias cotidianas y, por ende, sean más significativas para los alumnos. Estos problemas pueden surgir del mundo cotidiano cercano o lejano, pero también de otras ciencias y de las mismas matemáticas, convirtiéndose en ricas redes de interconexión e interdisciplinariedad.

La formulación, el tratamiento y la resolución de los problemas suscitados por una situación problema permiten desarrollar una actitud mental perseverante e inquisitiva, desplegar una serie de estrategias para resolverlos, encontrar resultados, verificar e interpretar lo razonable de ellos, modificar condiciones y originar otros problemas. Es importante abordar problemas abiertos donde sea posible encontrar múltiples soluciones o tal vez ninguna. También es muy productivo experimentar con problemas a los cuales les sobre o les falte información, o con enunciados narrativos o incompletos, para los que los estudiantes mismos tengan que formular las preguntas. Más bien que la resolución de multitud de problemas tomados de los textos escolares, que suelen ser sólo ejercicios de rutina, el estudio y análisis de situaciones problema suficientemente complejas y atractivas, en las que los estudiantes mismos inventen, formulen y resuelvan problemas matemáticos, es clave para el desarrollo del pensamiento matemático en sus diversas formas.

La modelación

Un modelo puede entenderse como un sistema figurativo mental, gráfico o tridimensional que reproduce o representa la realidad en forma esquemática para hacerla más comprensible. Es una construcción o artefacto material o mental, un sistema –a veces se dice también "una estructura"– que puede usarse como referencia para lo que se trata de comprender; una imagen analógica que permite volver cercana y concreta una idea o un concepto para su apropiación y manejo. Un modelo se produce para poder operar transformaciones o procedimientos experimentales sobre un conjunto de situaciones o un cierto número de objetos reales o imaginados, sin necesidad de manipularlos o dañarlos, para apoyar la formulación de conjeturas y razonamientos y dar pistas para avanzar hacia las demostraciones. En ese sentido, todo modelo es una representación, pero no toda representación es necesariamente un modelo, como sucede con las representaciones verbales y algebraicas que no son propiamente modelos, aunque pueden estarse interpretando en un modelo. Análogamente, todo modelo es un sistema, pero no todo sistema es un modelo, aunque cualquier sistema podría utilizarse como modelo, pues esa es la manera de producir nuevas metáforas, analogías, símiles o alegorías.

La modelación puede hacerse de formas diferentes, que simplifican la situación y seleccionan una manera de representarla mentalmente, gestualmente, gráficamente o por medio de símbolos aritméticos o algebraicos, para poder formular y resolver los problemas relacionados con ella. Un buen modelo mental o gráfico permite al estudiante buscar distintos caminos de solución, estimar una solución aproximada o darse cuenta de si una aparente solución encontrada a través de cálculos numéricos o algebraicos sí es plausible y significativa, o si es imposible o no tiene sentido.

En una situación problema, la modelación permite decidir qué variables y relaciones entre variables son importantes, lo que posibilita establecer modelos matemáticos de distintos niveles de complejidad, a partir de los cuales se pueden hacer predicciones, utilizar procedimientos numéricos, obtener resultados y verificar qué tan razonable son éstos respecto a las condiciones iniciales.

La matematización o modelación *puede entenderse como la detección de esquemas que se repiten en las situaciones cotidianas, científicas y matemáticas para reconstruirlas mentalmente.*

Con respecto a la modelación, en la didáctica de las matemáticas se ha hablado también con frecuencia desde 1977 de "la matematización" de una situación problema, con un término introducido por Hans Freudenthal[5]. Esta expresión se suele tomar como sinónimo de "la modelación" y ambas pueden entenderse en formas más y más complejas, que van desde una forma muy elemental, como simplificación y restricción de la complejidad de una situación real para reducirla a una situación ya conocida, de tal manera que se pueda detectar fácilmente qué esquema se le puede aplicar, cómo se relaciona con otras y qué operaciones matemáticas pueden ser pertinentes para responder a las preguntas que suscita dicha situación, hasta una forma muy avanzada, como creación de nuevos modelos y teorías matemáticas que permitan simular la evolución de una situación real en el tiempo. La segunda forma de entender la matematización y la modelación es más propia de los cursos avanzados de física, ingeniería, economía, demografía y similares, pero la primera puede comenzarse desde el preescolar e irse complejizando en los sucesivos grados escolares; esta primera manera de entender la matematización y la modelación es la que se utiliza en los Lineamientos Curriculares y en el presente documento de Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.

Este primer sentido de la matematización o modelación puede pues entenderse como la detección de esquemas que se repiten en las situaciones cotidianas, científicas y matemáticas para reconstruirlas mentalmente. Al respecto, Lynn Arthur Steen propuso en 1988[6] una definición de las matemáticas que va más allá de la descripción usual de ellas como la ciencia del espacio y el número: considera que las matemáticas parten de una base empírica, pero para detectar en ella esquemas que se repiten, que podemos llamar "modelos" o "patrones" ("patterns"), y en la multitud de esos modelos o patrones detectar de nuevo otros más y teorizar sobre sus relaciones para producir nuevas estructuras matemáticas, sin poner límites a la producción de nuevos modelos mentales, nuevas teorías y nuevas estructuras. Por lo tanto, las matemáticas serían la ciencia de los modelos o patrones ("Mathematics is the science of patterns"). Steen continúa así: "El matemático busca modelos o patrones en el número, en el espacio, en la ciencia, en los ordenadores y en la imaginación. Las teorías matemáticas explican

5 Freudenthal, H. (1977). *Mathematics as an educational task*. D. Reidel. Norwell, Massachusetts.

6 Steen, L. A. (1988) "The science of patterns," *Science*. Vol. 240 (29 April, 1988), 611-616.

las relaciones entre modelos o patrones; las funciones y los mapas, los operadores y los morfismos conectan un tipo de modelos o patrones con otros para producir estructuras matemáticas perdurables" [7].

La comunicación

A pesar de que suele repetirse lo contrario, las matemáticas no son un lenguaje, pero ellas pueden construirse, refinarse y comunicarse a través de diferentes lenguajes con los que se expresan y representan, se leen y se escriben, se hablan y se escuchan. La adquisición y dominio de los lenguajes propios de las matemáticas ha de ser un proceso deliberado y cuidadoso que posibilite y fomente la discusión frecuente y explícita sobre situaciones, sentidos, conceptos y simbolizaciones, para tomar conciencia de las conexiones entre ellos y para propiciar el trabajo colectivo, en el que los estudiantes compartan el significado de las palabras, frases, gráficos y símbolos, aprecien la necesidad de tener acuerdos colectivos y aun universales y valoren la eficiencia, eficacia y economía de los lenguajes matemáticos.

Las distintas formas de expresar y comunicar las preguntas, problemas, conjeturas y resultados matemáticos no son algo extrínseco y adicionado a una actividad matemática puramente mental, sino que la configuran intrínseca y radicalmente, de tal manera que la dimensión de las formas de expresión y comunicación es constitutiva de la comprensión de las matemáticas[8]. Podría decirse con Raymond Duval que si no se dispone al menos de dos formas distintas de expresar y representar un contenido matemático, formas que él llama "registros de representación" o "registros semióticos", no parece posible aprender y comprender dicho contenido[9].

El razonamiento

El desarrollo del razonamiento lógico empieza en los primeros grados apoyado en los contextos y materiales físicos que permiten percibir regularidades y relaciones; hacer predicciones y conjeturas; justificar o refutar esas conjeturas; dar explicaciones coherentes; proponer interpretaciones y respuestas posibles y adoptarlas o rechazarlas con argumentos y razones. Los modelos y materiales físicos y manipulativos ayudan a comprender que las matemáticas no son simplemente una memorización de reglas y algoritmos, sino que tienen sentido, son lógicas, potencian la capacidad de pensar y son divertidas. En los grados superiores, el razonamiento se va independizando de estos modelos y materiales, y puede trabajar directamente con proposiciones y teorías, cadenas argumentativas e intentos de validar o invalidar conclusiones, pero suele apoyarse también intermitentemente en comprobaciones e interpretaciones en esos modelos, materiales, dibujos y otros artefactos.

Es conveniente que las situaciones de aprendizaje propicien el razonamiento en los aspectos espaciales, métricos y geométricos, el razonamiento numérico y, en particular, el razonamiento proporcional apoyado en el uso de gráficas. En esas situaciones pueden aprovecharse diversas ocasiones de reconocer y aplicar tanto el razonamiento lógico inductivo y abductivo, al formular hipótesis o conjeturas, como el deductivo, al intentar comprobar la coherencia de una proposición con otras aceptadas previamente como teoremas, axiomas, postulados o principios, o al intentar refutarla por su contradicción con otras o por la construcción de contraejemplos.

7 Ibid., pág. 616. Ver también el artículo de Romberg, Thomas (1992), "Características problemáticas del currículo escolar de matemáticas" (en inglés). En: Philip W. Jackson (ed.), *Handbook of research on curriculum: A project of the American Educational Research Association*. Macmillan. New York.

8 Wiske, M. S. (Comp.). (2003). *La enseñanza para la comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica*. Paidós. Buenos Aires, Barcelona, México, págs. 237-239. Ver también: República de Colombia-Ministerio de Educación Nacional (1997). *Pequeños aprendices, grandes comprensiones* (Rosario Jaramillo Franco, Directora General de la Obra, 2 vols.). MEN. Bogotá, vol. 1, págs. 48-53.

9 Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (2a. ed.). Peter Lang-Universidad del Valle. Cali, págs. 32-42 y 74-83. (Original francés publicado en 1995).

La formulación, comparación y ejercitación de procedimientos

Este proceso implica comprometer a los estudiantes en la construcción y ejecución segura y rápida de procedimientos mecánicos o de rutina, también llamados "algoritmos", procurando que la práctica necesaria para aumentar la velocidad y precisión de su ejecución no oscurezca la comprensión de su carácter de herramientas eficaces y útiles en unas situaciones y no en otras y que, por lo tanto, pueden modificarse, ampliarse y adecuarse a situaciones nuevas, o aun hacerse obsoletas y ser sustituidas por otras.

Para analizar la contribución de la ejecución de procedimientos rutinarios en el desarrollo significativo y comprensivo del conocimiento matemático es conveniente considerar los mecanismos cognitivos involucrados en dichos algoritmos. Uno de estos mecanismos es la alternación de momentos en los que prima el conocimiento conceptual y otros en los que prima el procedimental, lo cual requiere atención, control, planeación, ejecución, verificación e interpretación intermitente de resultados parciales.

Otro mecanismo cognitivo clave es la automatización, que requiere de la práctica repetida para lograr una rápida, segura y efectiva ejecución de los procedimientos; esta automatización no contribuye directamente al desarrollo significativo y comprensivo del conocimiento, pero sí contribuye a adquirir destrezas en la ejecución fácil y rápida de cierto tipo de tareas. Estas destrezas dan seguridad al alumno y pueden afianzar y profundizar el dominio de dichos conocimientos, pero también pueden perder utilidad en la medida en que se disponga de ayudas tecnológicas que ejecuten dichas tareas más rápida y confiablemente.

Otro mecanismo cognitivo involucrado es la reflexión sobre qué procedimientos y algoritmos conducen al reconocimiento de patrones y regularidades en el interior de determinado sistema simbólico y en qué contribuyen a su conceptualización. Esta reflexión exige al estudiante poder explicar y entender los conceptos sobre los cuales un procedimiento o algoritmo se apoya, seguir la lógica que lo sustenta y saber cuándo aplicarlo de manera fiable y eficaz y cuándo basta utilizar una técnica particular para obtener más rápidamente el resultado.

Por ello, así el docente decida practicar y automatizar un solo algoritmo para cada una de las operaciones aritméticas usuales, es conveniente describir y ensayar otros algoritmos para cada una de ellas, compararlos con el que se practica en clase y apreciar sus ventajas y desventajas. Esta comparación permite distinguir claramente la operación conceptual de las distintas formas algorítmicas de ejecutarla y el resultado de dicha operación conceptual del símbolo producido al final de la ejecución de uno u otro algoritmo. Todo ello estimula a los estudiantes a inventar otros procedimientos para obtener resultados en casos particulares. Esto los prepara también para el manejo de calculadoras, el uso de hojas de cálculo, la elaboración de macroinstrucciones y aun para la programación de computadores.

Así el docente decida practicar y automatizar un solo algoritmo para cada una de las operaciones aritméticas usuales, es conveniente describir y ensayar otros algoritmos para cada una de ellas, compararlos con el que se practica en clase y apreciar sus ventajas y desventajas.

Los cinco tipos de pensamiento matemático

Los aspectos referidos anteriormente con respecto a la expresión *ser matemáticamente competente* muestran la variedad y riqueza de este concepto para la organización de currículos centrados en el desarrollo de las competencias matemáticas de manera que éstas involucren los distintos procesos generales descritos en la sección anterior. Estos procesos están muy relacionados con las competencias en su sentido más amplio explicado arriba, y aun en el sentido restringido de "saber hacer en contexto", pues *ser matemáticamente competente* requiere ser diestro, eficaz y eficiente en el desarrollo de cada uno de esos procesos generales, en los cuales cada estudiante va pasando por distintos niveles de competencia. Además de relacionarse con esos cinco procesos, *ser matemáticamente competente* se concreta de manera específica en el pensamiento lógico y el pensamiento matemático, el cual se subdivide en los cinco tipos de pensamiento propuestos en los Lineamientos Curriculares: el numérico, el espacial, el métrico o de medida, el aleatorio o probabilístico y el variacional.

El pensamiento lógico y el pensamiento matemático

A mediados del Siglo XX, Jean Piaget estudió la transición de la manera de razonar de los adolescentes de lo que él llamó "el pensamiento operatorio concreto" al "operatorio formal" y propuso un conjunto de operaciones lógico-matemáticas que podrían explicar ese paso[10]. En sus estudios previos sobre la lógica y la epistemología había propuesto que el pensamiento lógico actúa por medio de operaciones sobre las proposiciones y que el pensamiento matemático se distingue del lógico porque versa sobre el número y sobre el espacio[11], dando lugar a la aritmética y a la geometría. Tanto el pensamiento lógico como el matemático se distinguirían del pensamiento físico, que utiliza los dos anteriores pero tiene una relación diferente con la realidad y la experiencia.

En la primera sección se enunciaron algunos argumentos clásicos y actuales con respecto a la contribución de la educación matemática a la formación integral de los estudiantes: el desarrollo del pensamiento lógico, de la racionalidad y de la argumentación. Igualmente, en la sección siguiente, al analizar el proceso general de razonamiento, se mencionó el desarrollo de las competencias argumentativas que implican saber dar y pedir razones, probar y refutar, y ojalá avanzar hacia a demostración formal. No hay duda pues de que hay una estrecha relación entre el pensamiento lógico y el pensamiento matemático. Pero no puede pretenderse que las matemáticas son las únicas que desarrollan el pensamiento lógico en los estudiantes. En el aprendizaje del castellano y de las lenguas extranjeras, en la lectura de textos literarios extensos y profundos, en la filosofía, en las ciencias naturales y sociales, en fin, en cualquiera de las áreas curriculares o de los ejes transversales del trabajo escolar se puede y se debe desarrollar el pensamiento lógico. Tal vez en los deportes, cuando hay dificultades en la interpretación y la aplicación de los reglamentos de cada uno de ellos, es en donde muchos de los niños y las niñas empiezan a desarrollar competencias argumentativas y deductivas más complejas con el fin de defender a su equipo o a su jugador favorito contra las acusaciones de fuera de lugar, falta, mano voluntaria u otra violación del reglamento. Es pues necesario dejar claro que el pensamiento lógico no es parte del pensamiento matemático, sino que el pensamiento lógico apoya y perfecciona el pensamiento matemático, y con éste –en cualquiera de sus tipos– se puede y se debe desarrollar también el pensamiento lógico.

[10] Inhelder, B. y Piaget, J. (1985). *De la lógica del niño a la lógica del adolescente*. Paidós. Barcelona. (Original francés publicado en 1955).

[11] Piaget, J. (1978). *Introducción a la epistemología genética. I. El pensamiento matemático* (2a. ed.). Paidós. Buenos Aires. (Original francés publicado en 1950).

Eso no quiere decir que las matemáticas no sean el lugar privilegiado para desarrollar algunos aspectos del pensamiento lógico, sobre todo en lo que concierna a las argumentaciones y deducciones informales que preparan la demostración rigurosa de teoremas matemáticos a partir de axiomas, definiciones y teoremas previos. La práctica de la definición cuidadosa de términos técnicos, la de la argumentación a partir de premisas de las que no se sabe si son verdaderas o no y la de la deducción formal basada en axiomas más o menos arbitrarios y aun contrarios a la intuición espacial o numérica se desarrollan más naturalmente con el aprendizaje de la geometría euclidiana y de las no euclidianas, del álgebra abstracta y de otras ramas ya axiomatizadas de las matemáticas. En especial, la geometría euclidiana es un campo muy fértil para el cultivo de la abstracción, la generalización, la definición, la axiomatización y, ante todo, de la deducción formal a partir de axiomas, por tener una articulación óptima entre lo intuitivo y lo formal, lo concreto y lo abstracto y lo cotidiano y lo académico.

La subdivisión del pensamiento matemático

Para los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencias podría haber bastado la división entre pensamiento lógico y pensamiento matemático, sin subdividir este último. Pero en toda la tradición griega y medieval ya se había distinguido entre la manera de hacer matemáticas con respecto al número: la aritmética, y la manera de hacerlas con respecto al espacio: la geometría. Para la aritmética se pensó durante siglos únicamente en los números de contar, con las operaciones de adición y sustracción, multiplicación y división. Para la geometría se pensó también durante siglos únicamente en la geometría euclidiana, sistematizada en el Siglo IV antes de nuestra era. Estas dos maneras de hacer matemáticas sugieren pues una primera subdivisión del pensamiento matemático al menos en dos tipos: el pensamiento numérico y el espacial.

Con el desarrollo de las matemáticas y luego de la física, se notó también que había aspectos espaciales más intuitivos y cualitativos que los de la geometría, de los que se desarrolló una ciencia abstracta del espacio (llamada "topología" por la palabra griega para el espacio o el lugar, "topos"), los cuales no necesitaban de las nociones métricas. Se notó también que las nociones métricas no se aplicaban sólo a lo espacial (como en el caso de longitud, área y volumen) sino también a lo temporal (duración y frecuencia) y a otras muchas disciplinas, especialmente la física y la química (fuerza, peso, masa, densidad, temperatura, presión, velocidad, aceleración, etc.). Era pues conveniente distinguir también el pensamiento métrico del pensamiento numérico y del espacial.

Al desarrollarse desde el Siglo XVII la teoría de la probabilidad y el cálculo diferencial e integral, se empezó a notar también que entre los estudiantes de matemáticas había algunos que sobresalían en los aspectos aritméticos y geométricos, pero que tenían dificultad en pensar en los conceptos de la probabilidad o en las variaciones continuas de los procesos físicos. Pareció pues conveniente distinguir también el pensamiento probabilístico o aleatorio y el pensamiento analítico o variacional como tipos de pensamiento matemático diferentes del numérico, el espacial y el métrico, aunque muy relacionados con ellos.

Miguel de Guzmán[12], una de las figuras más influyentes en la educación matemática en España y en Latinoamérica, señala al respecto que, más allá de las ramas tradicionales

12 Guzmán, M. de (1995) "*Tendencias e innovaciones en educación matemática*". Conferencia en el Seminario de Educación Matemática. (Documento inédito disponible en la OEI). OEI. Bogotá.

de las matemáticas: la aritmética y la geometría, en su devenir histórico "el espíritu matemático habría de enfrentarse con:

- la complejidad del símbolo (álgebra)
- la complejidad del cambio y de la causalidad determinística (cálculo)
- la complejidad proveniente de la incertidumbre en la causalidad múltiple incontrolable (probabilidad, estadística)
- la complejidad de la estructura formal del pensamiento (lógica matemática)".

Aquí se puede ver una clara relación con los cinco tipos de pensamiento matemático enunciados en los Lineamientos Curriculares: en la aritmética, el pensamiento numérico; en la geometría, el pensamiento espacial y el métrico; en el álgebra y el cálculo, el pensamiento métrico y el variacional, y en la probabilidad y estadística, el pensamiento aleatorio.

Aquí se puede ver una clara relación con los cinco tipos de pensamiento matemático enunciados en los Lineamientos Curriculares: en la aritmética, el pensamiento numérico; en la geometría, el pensamiento espacial y el métrico; en el álgebra y el cálculo, el pensamiento métrico y el variacional, y en la probabilidad y estadística, el pensamiento aleatorio; finalmente, puede verse la alusión al pensamiento lógico, llamado también hipotético-deductivo o pensamiento formal.

Por todo ello, en los Lineamientos Curriculares se prefirió hablar de los cinco tipos de pensamiento matemático ya mencionados (el numérico, el espacial, el métrico o de medida, el aleatorio o probabilístico y el variacional), sin incluir en ellos el lógico, pues –como se indicó arriba– en todos esos cinco tipos es necesario atender al uso y al desarrollo del pensamiento lógico de los estudiantes y, a su vez, el progreso en el pensamiento lógico potencia y refina los cinco tipos de pensamiento matemático. Se describen a continuación uno por uno estos cinco tipos de pensamiento, mencionando simultáneamente los sistemas conceptuales y simbólicos con cuyo dominio se ejercita y refina el tipo de pensamiento respectivo, a la vez que ellos se desarrollan y perfeccionan con los avances en dichos tipos de pensamiento.

- ***El pensamiento numérico y los sistemas numéricos***

Los Lineamientos Curriculares de Matemáticas plantean el desarrollo de los procesos curriculares y la organización de actividades centradas en la comprensión del uso y de los significados de los números y de la numeración; la comprensión del sentido y significado de las operaciones y de las relaciones entre números, y el desarrollo de diferentes técnicas de cálculo y estimación. Dichos planteamientos se enriquecen si, además, se propone trabajar con las magnitudes, las cantidades y sus medidas como base para dar significado y comprender mejor los procesos generales relativos al pensamiento numérico y para ligarlo con el pensamiento métrico. Por ejemplo, para el estudio de los números naturales, se trabaja con el conteo de cantidades discretas y, para el de los números racionales y reales, de la medida de magnitudes y cantidades continuas.

En el caso de los números naturales, las experiencias con las distintas formas de conteo y con las operaciones usuales (adición, sustracción, multiplicación y división) generan una comprensión del concepto de número asociado a la acción de contar con unidades de conteo simples o complejas y con la reunión, la separación, la repetición y la repartición de cantidades discretas. En cierto sentido, la numerosidad o cardinalidad de estas cantidades se está midiendo con un conjunto unitario como unidad simple, o con la pareja, la decena o la docena como unidades complejas, y las operaciones usuales se asocian con ciertas combinaciones, separaciones, agrupaciones o reparticiones de estas cantidades, aunque de hecho se refieren más bien a los números que resultan de esas mediciones.

Históricamente, las operaciones usuales de la aritmética eran muy difíciles de ejecutar con los sistemas de numeración griegos o con el romano, y sólo en el Siglo XIII se empezó a adoptar en Europa el sistema de numeración indo-arábigo. Entre los Siglos XIV y XIX, la enseñanza de la aritmética escolar se redujo en la práctica al manejo de este sistema de numeración para los naturales y de su extensión para los racionales positivos (o "fraccionarios"). Pero durante el Siglo XX hubo una proliferación muy grande de otros contenidos matemáticos en la Educación Básica y Media; en particular, además de los naturales, se empezaron a estudiar los sistemas numéricos de los enteros, los racionales, los reales y los complejos, y otros sistemas de numeración antiguos y nuevos (como el binario, el octal, el hexadecimal, el vigesimal y el sexagesimal para los naturales y sus extensiones a los racionales), así como las notaciones algebraicas para los números irracionales, los reales y los complejos.

Históricamente, las operaciones usuales de la aritmética eran muy difíciles de ejecutar con los sistemas de numeración griegos o con el romano, y sólo en el Siglo XIII se empezó a adoptar en Europa el sistema de numeración indo-arábigo.

Estas extensiones sucesivas de los sistemas numéricos y de sus sistemas de numeración representan una fuerte carga cognitiva para estudiantes y docentes y una serie de dificultades didácticas para estos últimos. Es conveniente recordar, por ejemplo, que durante la Edad Antigua y Media ni siquiera las razones entre dos números de contar se consideraban como verdaderos números. Hoy día se aceptan como una nueva clase de números, llamados precisamente "racionales" (por la palabra latina "ratio", que significa "razón").

El paso del concepto de número natural al concepto de número racional necesita una reconceptualización de la unidad y del proceso mismo de medir, así como una extensión del concepto de número. El paso del número natural al número racional implica la comprensión de las medidas en situaciones en donde la unidad de medida no está contenida un número exacto de veces en la cantidad que se desea medir o en las que es necesario expresar una magnitud en relación con otras magnitudes. Las primeras situaciones llevan al número racional como medidor o como operador ampliador o reductor (algunos de estos últimos considerados a veces también como "partidores" o "fraccionadores" de la unidad en partes iguales), representado usualmente por una fracción como "¾", o por un decimal como "0,75", o por un porcentaje como "el 75%". Las otras situaciones llevan al número racional como razón, expresado a veces por frases como "3 de 4", o "3 por cada 4", o "la relación de 3 a 4", o por la abreviatura "3:4".

Algo parecido sucede con el paso del concepto de número natural al de número entero más general, que puede ser positivo, cero o negativo, y del concepto de número racional positivo (también llamado "número fraccionario") al de número racional más general, que también puede ser positivo, cero, o negativo. Aunque los chinos e hindúes empezaron a explorar números negativos hace más de mil años, en los países europeos éstos no se aceptaron como números hasta bien entrado el Siglo XVII. El concepto de número negativo es el resultado de la cuantificación de ciertos cambios en las medidas de una magnitud, o de la medida relativa de una magnitud con respecto a un punto de referencia, identificado con el cero. Este paso de los números naturales a los números enteros positivos y negativos (con el cero como entero) y a los números racionales positivos y negativos (con el cero como racional) no sólo amplía el concepto de número, sino que también obliga a cambios conceptuales en las operaciones y las relaciones entre ellos, configurando así sistemas numéricos diferentes.

El fracaso en la medición de ciertas longitudes cuando se tomaba otra como unidad llevó al concepto de número irracional, que complementó el de número racional y llevó a pensar en un sistema unificado de números racionales e irracionales llamados "reales", con sus operaciones y relaciones apropiadamente extendidas a los nuevos números. Las conceptualizaciones relativas a los números reales implican la aritmetización de procesos infinitos, y por ende, la construcción de las nociones de inconmensurabilidad, irracionalidad, completitud y continuidad. Igualmente, este paso de los números racionales a los números reales requiere del uso y comprensión de diferentes tipos de representaciones numéricas, sobre todo, las relativas a los números irracionales, tanto por medio de decimales infinitos como de símbolos algebraicos.

El fracaso en la solución de ciertas ecuaciones algebraicas llevó a la conceptualización de un nuevo tipo de número, llamado "imaginario", que complementó el de número real y llevó a pensar en un sistema unificado de números llamados "complejos". Éstos, a su vez, requieren de diferentes tipos de representaciones y una extensión de las operaciones y las relaciones entre estos nuevos números complejos.

Se fueron configurando así sistemas numéricos llamados "naturales", "racionales positivos" (o "fraccionarios"), "enteros", "racionales", "reales" y "complejos", cada uno de ellos con operaciones y relaciones extendidas a los nuevos sistemas numéricos a partir de su significado en los naturales y con sus sistemas de numeración o sistemas notacionales cada vez más ingeniosos. El pensamiento aritmético opera mentalmente sobre sistemas numéricos en interacción con los sistemas de numeración, y sin estos últimos no se hubieran podido perfeccionar ni siquiera los sistemas numéricos naturales, mucho menos los demás.

Así pues, el desarrollo del pensamiento numérico exige dominar progresivamente un conjunto de procesos, conceptos, proposiciones, modelos y teorías en diversos contextos, los cuales permiten configurar las estructuras conceptuales de los diferentes sistemas numéricos necesarios para la Educación Básica y Media y su uso eficaz por medio de los distintos sistemas de numeración con los que se representan. El complejo y lento desarrollo histórico de estos sistemas numéricos y simbólicos esbozado arriba sugiere que la construcción de cada uno de estos sistemas conceptuales y el manejo competente de uno o más de sus sistemas simbólicos no puede restringirse a grados específicos del ciclo escolar, sino que todos ellos se van construyendo y utilizando paciente y progresivamente a lo largo de la Educación Básica y Media. Un acompañamiento pedagógico paciente y progresivo de los estudiantes puede lograr que la gran mayoría de ellos logre la proeza de recorrer doce milenios de historia del pensamiento numérico en sólo doce años de escolaridad.

- ***El pensamiento espacial y los sistemas geométricos***

El pensamiento espacial, entendido como "… el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones materiales"[13] contempla las actuaciones del sujeto en todas sus dimensiones y relaciones espaciales para interactuar de diversas maneras con los objetos situados en el espacio, desarrollar variadas representaciones y, a través de la coordinación entre ellas, hacer acercamientos conceptuales que favorezcan la creación y manipulación de nuevas representaciones mentales. Esto requiere del estudio de conceptos y propiedades de los objetos en el espacio físico y de los conceptos y propiedades del espacio geométrico en relación con los movimientos del propio cuerpo y las coordinaciones entre ellos y con los distintos órganos de los sentidos.

Desde esta perspectiva se rescatan, de un lado, las relaciones topológicas, en tanto reflexión sistemática de las propiedades de los cuerpos en virtud de su posición y su relación con los demás y, de otro lado, el reconocimiento y ubicación del estudiante en el espacio que lo rodea, en lo que Grecia Gálvez ha llamado el meso-espacio y el macro-espacio, refiriéndose no sólo al tamaño de los espacios en los que se desarrolla la vida del individuo, sino también a su relación con esos espacios[14]. En este primer momento del pensamiento espacial no son importantes las mediciones ni los resultados numéricos de las medidas, sino las relaciones entre los objetos involucrados en el espacio, y la ubicación y relaciones del individuo con respecto a estos objetos y a este espacio.

Posteriormente, y a medida que se complejizan los sistemas de representación del espacio, en un segundo momento se hace necesaria la metrización, pues ya no es suficiente con decir que algo está cerca o lejos de algo, sino que es necesario determinar qué tan cerca o qué tan lejos está. Esto significa un salto de lo cualitativo a lo cuantitativo, lo cual hace aparecer nuevas propiedades y relaciones entre los objetos. De esta manera, la percepción geométrica se complejiza y ahora las propiedades de los objetos se deben no sólo a sus relaciones con los demás, sino también a sus medidas y a las relaciones entre ellas. El estudio de estas propiedades espaciales que involucran la métrica son las que, en un tercer momento, se convertirán en conocimientos formales de la geometría, en particular, en teoremas de la geometría euclidiana.

Lo anterior implica relacionar el estudio de la geometría con el arte y la decoración; con el diseño y construcción de objetos artesanales y tecnológicos; con la educación física, los deportes y la danza; con la observación y reproducción de patrones (por ejemplo en las plantas, animales u otros fenómenos de la naturaleza) y con otras formas de lectura y comprensión del espacio (elaboración e interpretación de mapas, representaciones a escala de sitios o regiones en dibujos y maquetas, etc.), entre otras muchas situaciones posibles muy enriquecedoras y motivadoras para el desarrollo del pensamiento espacial.

13 Ministerio de Educación Nacional (1998). *Matemáticas. Lineamientos curriculares*. MEN. Bogotá, pág. 56.

14 Gálvez, Grecia (1988). "La geometría. La psicogénesis de las nociones espaciales y la enseñanza de la geometría en la escuela primaria". En: Cecilia Parra e Irma Saiz (comps.). *Didáctica de las matemáticas. Aportes y Reflexiones*. Paidós Educador. Buenos Aires.

Así pues, la apropiación por parte de los estudiantes del espacio físico y geométrico requiere del estudio de distintas relaciones espaciales de los cuerpos sólidos y huecos entre sí y con respecto a los mismos estudiantes; de cada cuerpo sólido o hueco con sus formas y con sus caras, bordes y vértices; de las superficies, regiones y figuras planas con sus fronteras, lados y vértices, en donde se destacan los procesos de localización en relación con sistemas de referencia, y del estudio de lo que cambia o se mantiene en las formas geométricas bajo distintas transformaciones. El trabajo con objetos bidimensionales y tridimensionales y sus movimientos y transformaciones permite integrar nociones sobre volumen, área y perímetro, lo cual a su vez posibilita conexiones con los sistemas métricos o de medida y con las nociones de simetría, semejanza y congruencia, entre otras. Así, la geometría activa se presenta como una alternativa para refinar el pensamiento espacial, en tanto se constituye en herramienta privilegiada de exploración y de representación del espacio[15]. El trabajo con la geometría activa puede complementarse con distintos programas de computación que permiten representaciones y manipulaciones que eran imposibles con el dibujo tradicional.

Como todos los sistemas, los geométricos tienen tres aspectos: los elementos de que constan, las operaciones y transformaciones con las que se combinan, y las relaciones o nexos entre ellos.

Los puntos, líneas rectas y curvas, regiones planas o curvas limitadas o ilimitadas y los cuerpos sólidos o huecos limitados o ilimitados pueden considerarse como los elementos de complicados sistemas de figuras, transformaciones y relaciones espaciales: los sistemas geométricos. Como todos los sistemas, los geométricos tienen tres aspectos: los elementos de que constan, las operaciones y transformaciones con las que se combinan, y las relaciones o nexos entre ellos. Estos sistemas se expresan por dibujos, gestos, letras y palabras que se utilizan como registros de representación diferentes que se articulan en sistemas notacionales o sistemas simbólicos para expresar y comunicar los sistemas geométricos y posibilitar su tratamiento, para razonar sobre ellos y con ellos y, a su vez, para producir nuevos refinamientos en los sistemas geométricos. El pensamiento espacial opera mentalmente sobre modelos internos del espacio en interacción con los movimientos corporales y los desplazamientos de los objetos y con los distintos registros de representación y sus sistemas notacionales o simbólicos. Sin estos últimos, tampoco se hubiera podido perfeccionar el trabajo con los sistemas geométricos y, en consecuencia, refinar el pensamiento espacial que los construye, maneja, transforma y utiliza.

Los sistemas geométricos pueden modelarse mentalmente o con trazos sobre el papel o el tablero y describirse cada vez más finamente por medio del lenguaje ordinario y los lenguajes técnicos y matemáticos, con los cuales se pueden precisar los distintos modelos del espacio y formular teorías más y más rigurosas. Estos modelos con sus teorías se suelen llamar "geometrías".

La geometría euclidiana fue la primera rama de las matemáticas en ser organizada de manera lógica. Por ello, entre los propósitos principales de su estudio está definir, justificar, deducir y comprender algunas demostraciones. La geometría euclidiana puede considerarse como un punto de encuentro entre las matemáticas como una práctica social y como una teoría formal y entre el pensamiento espacial y el pensamiento mé-

[15] Ministerio de Educación Nacional (1998). *Matemáticas. Lineamientos curriculares*. MEN. Bogotá, pág. 57.

trico. Por ello, como se dijo al tratar sobre el pensamiento lógico, el pensamiento espacial y el métrico encuentran en la geometría euclidiana un lugar privilegiado –aunque no exclusivo– para el desarrollo del pensamiento lógico y éste, a su vez, potencia y refina los dos primeros.

- ***El pensamiento métrico y los sistemas métricos o de medidas***

Los conceptos y procedimientos propios de este pensamiento hacen referencia a la comprensión general que tiene una persona sobre las magnitudes y las cantidades, su medición y el uso flexible de los sistemas métricos o de medidas en diferentes situaciones. En los Lineamientos Curriculares se especifican conceptos y procedimientos relacionados con este tipo de pensamiento, como:

- La construcción de los conceptos de cada magnitud.
- La comprensión de los procesos de conservación de magnitudes.
- La estimación de la medida de cantidades de distintas magnitudes y los aspectos del proceso de "capturar lo continuo con lo discreto".
- La apreciación del rango de las magnitudes.
- La selección de unidades de medida, de patrones y de instrumentos y procesos de medición.
- La diferencia entre la unidad y los patrones de medición.
- La asignación numérica.
- El papel del trasfondo social de la medición[16].

En relación con los anteriores conceptos y procedimientos, es importante destacar que la estimación de las medidas de las cantidades y la apreciación de los rangos entre los cuales puedan ubicarse esas medidas trascienden el tratamiento exclusivamente numérico de los sistemas de medidas y señalan la estimación como puente de relaciones entre las matemáticas, las demás ciencias y el mundo de la vida cotidiana, en contextos en los que no se requiere establecer una medida numérica exacta. Otros aspectos importantes en este pensamiento son la integración de la estimación con los procedimientos numéricos de truncamiento y redondeo, el tratamiento del error, la valoración de las cifras significativas y el uso de técnicas de encuadramiento, así como la expresión de medidas grandes y pequeñas por medio de la notación científica.

Históricamente, el pensamiento métrico se perfeccionó con el refinamiento de las unidades de medida de longitud, tomadas al comienzo de partes del cuerpo y por tanto muy diversas en cada región y cultura, que fueron luego estandarizadas para el comercio y la industria. Se configuraron en distintas regiones y países muchos sistemas de unidades y medidas o sistemas métricos, como el francés, el español, el ruso, el inglés y su variante norteamericana y, después de la Revolución Francesa, se empezó a diseñar un sistema decimal de pesos y medidas que tuvo varias etapas y configuraciones, como el sistema CGS (centímetro-gramo-segundo) y el MKS (metro-kilogramo-segundo) y, más recientemente, el SI (Sistema Internacional de unidades y medidas), que es el más extendido actualmente. Sin embargo, el inglés y el norteamericano siguen siendo muy utilizados en todo el mundo y muchos de los antiguos sistemas locales subsisten más o menos adaptados a las unidades internacionales. Así pues, el pensamiento mé-

[16] Ibid., pág. 63.

trico no puede trabajar sin sistemas de medidas o métricos, ni éstos refinarse sin las notaciones, registros, tablas, abreviaturas y otros sistemas notacionales o simbólicos, en una interacción dialéctica constante y cambiante.

En lo que respecta al aprendizaje de sistemas de medida y, en particular del SI, es importante el reconocimiento del conjunto de unidades de medida que se utilizan para cada una de las diferentes magnitudes (la velocidad, la densidad, la temperatura, etc., y no sólo de las magnitudes más relacionadas con la geometría: la longitud, el área, el volumen y la amplitud angular). El estudio de esas primeras magnitudes muestra que el pensamiento métrico no se limita a las matemáticas, sino que se extiende también a las ciencias naturales y sociales. En cada conjunto de unidades del SI para cada magnitud hay una unidad que sirve de base a las otras, que son mayores (múltiplos) o menores (submúltiplos) de dicha unidad básica. Así se construyen herramientas conceptuales para el análisis y la ejercitación de la equivalencia entre medidas expresadas en distintas unidades y la explicitación de las relaciones pertinentes del SI con el sistema de numeración decimal en sus diversas formas escriturales: con coma, con punto y en notación científica. Esas relaciones entre el sistema de numeración decimal y cada sistema de unidades del SI para una determinada magnitud (por ejemplo la longitud) se indican por los prefijos que expresan los múltiplos (deca-, hecto-, kilo-, etc.) y submúltipos (deci-, centi-, mili-, etc.) de la unidad básica (en este caso, del metro) y su correspondencia con las unidades superiores del sistema métrico decimal (decena, centena, unidad de mil, etc.) y con las unidades inferiores (décima, centésima, milésima, etc.). Igualmente, es necesario establecer diferencias conceptuales entre procedimientos e instrumentos de medición, entre unidades y patrones de medida, y entre la precisión y la exactitud de una medición.

De especial importancia son aquellas magnitudes que tienen estrecha relación con aspectos claves de la vida social, como por ejemplo, todo lo relacionado con los servicios públicos, sus procesos de medición y facturación y las unidades respectivas (litro, metro cúbico, voltio, amperio, vatio, kilovatio, kilovatio-hora), algunas de las cuales, como ya se indicó arriba, desbordan el campo de las matemáticas y requieren del desarrollo del pensamiento científico y del aprendizaje de algunos contenidos de la física. De esta manera, el pensamiento métrico está estrechamente relacionado con las disciplinas científicas naturales y sociales y con las competencias ciudadanas, en particular, con lo que al cuidado del medio ambiente se refiere, en tanto conviene tener elementos conceptuales claros para hacer un uso racional de los servicios públicos, identificar cuándo se está haciendo un gasto innecesario de ellos, explicar las razones por las cuales pudo haberse incrementado el gasto y proponer medidas eficaces para el ahorro del agua, el gas y la energía eléctrica.

- ***El pensamiento aleatorio y los sistemas de datos***

Este tipo de pensamiento, llamado también probabilístico o estocástico, ayuda a tomar decisiones en situaciones de incertidumbre, de azar, de riesgo o de ambigüedad por falta de información confiable, en las que no es posible predecir con seguridad lo que va a pasar. El pensamiento aleatorio se apoya directamente en conceptos y procedimientos de la teoría de probabilidades y de la estadística inferencial, e indirectamente en la estadística descriptiva y en la combinatoria. Ayuda a buscar soluciones razonables a problemas en los que no hay una solución clara y segura, abordándolos con un espíritu de exploración y de investigación mediante la construcción de modelos de fenómenos físicos, sociales o de juegos de azar y la utilización de estrategias como la exploración de sistemas de datos, la simulación de experimentos y la realización de conteos.

El azar se relaciona con la ausencia de patrones o esquemas específicos en las repeticiones de eventos o sucesos, y otras veces con las situaciones en las que se ignora cuáles puedan ser esos patrones, si acaso existen, como es el caso de los estados del tiempo; de la ocurrencia de los terremotos, huracanes u otros fenómenos de la naturaleza; de los accidentes, fallas mecánicas, epidemias y enfermedades; de las elecciones por votación; de los resultados de dispositivos como los que se usan para extraer esferas numeradas para las loterías y de las técnicas para efectuar los lanzamientos de dados o monedas o para el reparto de cartas o fichas en los juegos que por esto mismo se llaman "de azar".

El azar se relaciona con la ausencia de patrones o esquemas específicos en las repeticiones de eventos o sucesos, y otras veces con las situaciones en las que se ignora cuáles puedan ser esos patrones, si acaso existen, como es el caso de los estados del tiempo.

En las experiencias cotidianas que los estudiantes ya tienen sobre estos sucesos y estos juegos, empiezan a tomar conciencia de que su ocurrencia y sus resultados son impredecibles e intentan realizar estimaciones intuitivas acerca de la posibilidad de que ocurran unos u otros. Estas estimaciones conforman una intuición inicial del azar y permiten hacer algunas asignaciones numéricas para medir las probabilidades de los eventos o sucesos, así sean inicialmente un poco arbitrarias, que comienzan con asignar probabilidad 0 a la imposibilidad o a la máxima improbabilidad de ocurrencia; asignar ½ a cualquiera de dos alternativas que se consideran igualmente probables, y asignar 1 a la necesidad o a la máxima probabilidad de ocurrencia.

Las situaciones y procesos que permiten hacer un conteo sistemático del número de combinaciones posibles que se puedan asumir como igualmente probables, junto con el registro de diferentes resultados de un mismo juego, así como los intentos de interpretación y predicción de los mismos a partir de la exploración de sistemas de datos, desarrollan en los estudiantes la distinción entre situaciones deterministas y situaciones aleatorias o azarosas y permiten refinar las mediciones de la probabilidad con números entre 0 y 1. Más tarde, esas situaciones y procesos pueden modelarse por medio de sistemas matemáticos relacionados con la teoría de probabilidades y la estadística.

El empleo cada vez más generalizado de las tablas de datos y de las recopilaciones de información codificada llevó al desarrollo de la estadística descriptiva, y el estudio de los sistemas de datos por medio del pensamiento aleatorio llevó a la estadística inferencial y a la teoría de probabilidades. El manejo y análisis de los sistemas de datos se volvió inseparable del pensamiento aleatorio.

Los sistemas analíticos probabilísticos y los métodos estadísticos desarrollados durante los siglos XIX y XX se han refinado y potenciado en los últimos decenios con los avances de la computación electrónica y, por ello, hoy día ya no es tan importante para los estudiantes el recuerdo de las fórmulas y la habilidad para calcular sus valores, como sí lo es el desarrollo del pensamiento aleatorio, que les permitirá interpretar, analizar y utilizar los resultados que se publiquen en periódicos y revistas, que se presenten en la televisión o que aparezcan en pantalla o en hojas impresas como productos de los distintos programas de análisis de datos.

Por ello, no es ya necesario aprender las fórmulas y procedimientos matemáticos para calcular la media o la mediana, la varianza o la desviación estándar, sino avanzar gradualmente en el desarrollo de habilidades combinatorias para encontrar todas las situaciones posibles dentro de ciertas condiciones, estimar si son o no igualmente probables y asignarles probabilidades numéricas, así como en dominar los conceptos y procedimientos necesarios para recoger, estudiar, resumir y diagramar sistemas de datos estadísticos y tratar de extraer de ellos toda la información posible con la ayuda de calculadoras, hojas de cálculo y otros programas de análisis de datos, con el fin de intentar predecir dentro de ciertos rangos el curso de los acontecimientos respectivos y de tomar decisiones lo más razonables posibles ante la imposibilidad de saber con certeza lo que va a pasar.

- ***El pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos***

Como su nombre lo indica, este tipo de pensamiento tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos. Uno de los propósitos de cultivar el pensamiento variacional es construir desde la Educación Básica Primaria distintos caminos y acercamientos significativos para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico y, en la Educación Media, del cálculo diferencial e integral. Este pensamiento cumple un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y las matemáticas mismas.

El pensamiento variacional se desarrolla en estrecha relación con los otros tipos de pensamiento matemático (el numérico, el espacial, el de medida o métrico y el aleatorio o probabilístico) y con otros tipos de pensamiento más propios de otras ciencias, en especial a través del proceso de modelación de procesos y situaciones naturales y sociales por medio de modelos matemáticos. En particular la relación con otros pensamientos aparece con mucha frecuencia, porque la variación y el cambio, aunque se representan usualmente por medio de sistemas algebraicos y analíticos, requieren de conceptos y procedimientos relacionados con distintos sistemas numéricos (en particular, del sistema de los números reales, fundamentales en la construcción de las funciones de variable real), geométricos, de medidas y de datos y porque todos estos sistemas, a su vez, pueden presentarse en forma estática o en forma dinámica y variacional.

El desarrollo de este pensamiento se inicia con el estudio de regularidades y la detección de los criterios que rigen esas regularidades o las reglas de formación para identificar el patrón que se repite periódicamente. Las regularidades (entendidas como unidades de repetición) se encuentran en sucesiones o secuencias que presentan objetos, sucesos, formas o sonidos, uno detrás de otro en un orden fijado o de acuerdo a un patrón. De esta manera, la unidad que se repite con regularidad da lugar a un patrón. Al identificar en qué se parecen y en qué se diferencian los términos de estas sucesiones o secuencias, se desarrolla la capacidad para identificar en qué consiste la repetición de mismo patrón y la capacidad para reproducirlo por medio de un cierto procedimiento, algoritmo o fórmula.

Para desarrollar este pensamiento desde los primeros niveles de la Educación Básica Primaria son muy apropiadas, entre otras, las siguientes actividades: analizar de qué forma cambia, aumenta o disminuye la forma o el valor en una secuencia o sucesión de figuras, números o letras; hacer conjeturas sobre la forma o el valor del siguiente término de la secuencia; procurar expresar ese término, o mejor los dos o tres términos siguientes, oralmente o por escrito, o por medio de dibujos y otras representaciones, e intentar formular un procedimiento, algoritmo o fórmula que permita reproducir el mismo patrón, calcular los siguientes términos, confirmar o refutar las conjeturas iniciales e intentar generalizarlas.

Las actividades de generalización de patrones numéricos, geométricos y de leyes y reglas de tipo natural o social que rigen los números y las figuras involucran la visualización, exploración y manipulación de los números y las figuras en los cuales se basa el proceso de generalización[17]. Esta es una forma muy apropiada de preparar el aprendizaje significativo y comprensivo de los sistemas algebraicos y su manejo simbólico mucho antes de llegar al séptimo y octavo grado. Estas actividades preparan a los estudiantes para la construcción de la expresión algebraica a través de la formulación verbal de una regla recursiva que muestre cómo construir los términos siguientes a partir de los precedentes y el hallazgo de un patrón que los guíe más o menos directamente a la expresión algebraica.

Las regularidades (entendidas como unidades de repetición) se encuentran en sucesiones o secuencias que presentan objetos, sucesos, formas o sonidos, uno detrás de otro en un orden fijado o de acuerdo a un patrón.

El estudio del cambio también se puede iniciar en la Educación Básica Primaria a través del análisis de fenómenos de variación (por ejemplo, el crecimiento de una planta durante un mes o el cambio de la temperatura durante el día o el flujo de vehículos frente a la institución durante una mañana) representados en gráficas y tablas. Esta manera de acercarse al pensamiento variacional está muy relacionada con el manejo de los sistemas de datos y sus representaciones. Por el análisis cuidadoso de esas representaciones se puede identificar la variación que ocurre y, en algunos casos, llegar a precisar la magnitud de los cambios y aun la tasa de cambio en relación con el tiempo.

En la Educación Básica Secundaria, el sistema de representación más directamente ligado con las variaciones es el sistema algebraico, pero éstas también se expresan por medio de otros tipos de representaciones como las gestuales, las del lenguaje ordinario o técnico, las numéricas (tablas), las gráficas (diagramas) y las icónicas, que actúan como intermediarias en la construcción general de los procedimientos, algoritmos o fórmulas que definen el patrón y las respectivas reglas que permiten reproducirlo.

El estudio de los patrones está relacionado con nociones y conceptos propios del pensamiento variacional, como *constante*, *variable*, *función*, *razón o tasa de cambio, dependencia e independencia* de una variable con respecto a otra, y con los distintos tipos de modelos funcionales asociados a ciertas familias de funciones, como las lineales y las afines (o de gráfica lineal), las polinómicas y las exponenciales, así como con las relaciones de desigualdad y el manejo de ecuaciones e inecuaciones. El estudio de las relaciones funcionales que pueden detectarse en la vida cotidiana, como las relaciones entre edad y altura de un niño (o entre edad y masa o peso corporal), entre la temperatura a lo largo de un día y la hora que marca un reloj, etc., permite coordinar cambios de una magnitud Y con cambios de una magnitud X. Esta primera aproximación a la noción la función es la de dependencia funcional entre magnitudes variables.

17 Mason, J.; Burton, L. y Stacey, K. (1992). *Pensar matemáticamente*. Labor. Barcelona.

Es importante distinguir las funciones lineales de las no lineales y conectar el estudio de la proporcionalidad directa con las funciones lineales. Es importante también tener en cuenta que las funciones permiten analizar y modelar distintos fenómenos y procesos no sólo en problemas y situaciones del mundo de la vida cotidiana, sino también de las ciencias naturales y sociales y de las matemáticas mismas.

El desarrollo del pensamiento variacional, dadas sus características, es lento y complejo, pero indispensable para caracterizar aspectos de la variación tales como lo que cambia y lo que permanece constante, las variables que intervienen, el campo de variación de cada variable y las posibles relaciones entre esas variables. Además, en las situaciones de aprendizaje que fomentan el desarrollo de este tipo de pensamiento, también se dan múltiples oportunidades para la formulación de conjeturas, la puesta a prueba de las mismas, su generalización y la argumentación para sustentar o refutar una conjetura o una propuesta de generalización, todo lo cual se relaciona con el pensamiento lógico y el pensamiento científico. Esto se logra a través de la elaboración e interpretación de ciertas representaciones matemáticas –gráficas, tablas, ecuaciones, inecuaciones o desigualdades, etc.– que permiten tratar con situaciones de variación y dependencia en la resolución de problemas. Los objetos algebraicos, como por ejemplo los términos algebraicos, se reconstruyen como representaciones de funciones y las ecuaciones e inecuaciones se reinterpretan como igualdades o desigualdades entre funciones. De aquí que las múltiples relaciones entre la producción de patrones de variación y el proceso de modelación –y particularmente el estudio de las nociones de variable y de función– sean las perspectivas más adecuadas para relacionar el pensamiento variacional con el cálculo algebraico en la Educación Básica Secundaria y con la geometría analítica y el cálculo diferencial e integral en la Educación Media.

El desarrollo del álgebra en los Siglos XVI y XVII y el del cálculo diferencial e integral en los Siglos XVII y XVIII mostraron también que el pensamiento variacional no se podía refinar sin los sistemas algebraicos y analíticos ni éstos sin aquél. La relación del pensamiento variacional con el manejo de los sistemas algebraicos muestra que el álgebra es un sistema potente de representación y de descripción de fenómenos de variación y cambio y no solamente un juego formal de símbolos no interpretados, por útiles, ingeniosos e interesantes que sean dichos juegos.

Un aspecto importante en el aprendizaje del álgebra corresponde a la utilización con sentido y al estudio formal de los objetos algebraicos (variables, constantes, parámetros, términos, fórmulas y otras expresiones algebraicas como las ecuaciones e inecuaciones, los sistemas de ecuaciones o de inecuaciones, por ejemplo), para lo cual es necesario ampliar la notación del lenguaje aritmético y utilizar las propiedades características de los sistemas numéricos (como la conmutativa y la asociativa de la adición y la multiplicación y la distributiva de la multiplicación respecto de la adición, o el carácter simétrico y transitivo de la igualdad y el carácter antisimétrico y transitivo de la desigualdad). De esta manera, el cálculo algebraico surge como generalización del trabajo aritmético con modelos numéricos en situaciones de variación de los valores de las mediciones de cantidades relacionadas funcionalmente.

Es necesario señalar que el desarrollo de este pensamiento debe también atender al estudio de las actividades matemáticas propias de los procesos infinitos, pues son éstos los que caracterizan el campo conceptual del análisis matemático, en el cual se sitúa el cálculo diferencial e integral que se suele introducir en el grado 11. Por tal razón es necesario incorporar tempranamente a los estudiantes en el estudio de los conceptos fundamentales de ese campo y de las técnicas y métodos de estimación y de aproximación, lo cual se logra articulando la búsqueda de soluciones no exactas, de intervalos de valores aceptables, de problemas de estimación de posibles valores en el contexto de medidas de longitudes, áreas y volúmenes y de modelos matemáticos de procesos biológicos, químicos y físicos que utilicen expresiones algebraicas. Se refuerza así a la estimación como núcleo conceptual importante en el desarrollo del pensamiento numérico.

Ya desde el comienzo de la Básica Secundaria cobra especial importancia el estudio de los números decimales como sistemas de representación de valores aproximados y como expresiones infinitas para números racionales e irracionales, así como el cálculo del área del círculo, de los volúmenes de cilindros, conos y esferas y de las áreas exteriores de los mismos, todo lo cual prepara a los estudiantes para conceptualizar el límite, la continuidad, la derivada como tasa de cambio instantánea y la integral definida como límite de una suma.

Relaciones entre los cinco tipos de pensamiento matemático

Los cinco tipos de pensamiento descritos anteriormente tienen elementos conceptuales comunes que permiten el diseño de situaciones de aprendizaje –y en particular de situaciones problema– que integren los diferentes pensamientos y que, a la vez, posibilitan que los procesos de aprendizaje de las matemáticas se den a partir de la construcción de formas generales y articuladas de esos mismos tipos de pensamiento matemático. Entre los elementos integradores de mayor relevancia se pueden destacar:

- El estudio de la variación como una base fundamental para acceder a los procesos de generalización propios de cada uno de los pensamientos. En este sentido, el estudio de las propiedades de los números y sus operaciones y de la manera como varían sus resultados con el cambio de los argumentos u operandos, o de los objetos de la geometría y sus características y de la manera como cambian las medidas de las cantidades asociadas con las transformaciones de esos objetos, se proponen como procesos de abstracción y generalización a partir del análisis de lo que es invariante en medio de los aspectos variables de un conjunto de situaciones. Muchos de los conceptos de la aritmética y la geometría se suelen presentar en forma estática, pero ganarían mucho en flexibilidad y generalidad y atraerían más el interés de los estudiantes si se presentan en forma dinámica y variacional.

- El tratamiento de las magnitudes y sus procesos de medición se constituyen en la base conceptual sobre la cual se organizan los procesos conceptuales de cada pensamiento. El estudio de la variación hace necesaria una referencia a la identificación de variables, y por tanto, al reconocimiento de las magnitudes y de las medidas de las cantidades asociadas. Así, por ejemplo, ya se señaló a propósito del pensamiento numérico cómo el tratamiento de las magnitudes cobra fuerza en el aprendizaje del concepto de número (medir y contar como base para su aprendizaje), de las operaciones entre números (al operar no solo se opera sobre números, sino también, sobre las cantidades y magnitudes que ellos representan en el contexto del problema que se pretende resolver) y de las relaciones entre ellos (al comparar números es conveniente comparar longitudes de segmentos y trazos o marcas en una recta numérica).

- La estimación y la aproximación son dos procesos presentes en los diferentes pensamientos. Ellas son elementos fundamentales en la construcción de los conceptos, procesos y procedimientos relativos a cada pensamiento, principalmente al numérico, al métrico y al aleatorio; llaman la atención sobre el carácter inexacto e incompleto de muchos de los resultados de las matemáticas y de otras ciencias, y ayudan a organizar formas de pensamiento flexibles asociadas a contextos particulares. De otra parte, muestran que en la mayoría de las situaciones cotidianas lo que se necesita es tener una buena estimación del rango de magnitud de un resultado y no tanto un resultado exacto.

- El tratamiento de los conceptos relativos a la medida de magnitudes compuestas a partir de las relaciones funcionales con respecto a las magnitudes fundamentales que las componen hace que conceptos como el de área, volumen, velocidad, aceleración, densidad, etc., puedan entenderse como funciones de otras magnitudes más simples. Igualmente, esta aproximación hace que los conceptos relativos al pensamiento métrico se relacionen de manera directa con el numérico y sirvan de puente para el estudio de las disciplinas científicas naturales y sociales.

- El tratamiento de las situaciones que involucran fenómenos estocásticos hace necesario el recurso a conceptos relacionados con el pensamiento variacional, al igual que el recurso a los conceptos numéricos, en tanto que se deben identificar variables, determinar su comportamiento a lo largo de su posible conjunto de valores, discriminar entre las variables independientes y las dependientes, y determinar, dentro de las posibilidades del fenómeno, la distribución de las variables independientes para predecir el posible comportamiento de las variables dependientes para distintos rangos de valores de las dependientes.

Los tres contextos en el aprendizaje de las matemáticas

El contexto del aprendizaje de las matemáticas es el lugar –no sólo físico, sino ante todo sociocultural– desde donde se construye sentido y significado para las actividades y los contenidos matemáticos, y por lo tanto, desde donde se establecen conexiones con la vida cotidiana de los estudiantes y sus familias, con las demás actividades de la institución educativa y, en particular, con las demás ciencias y con otros ámbitos de las matemáticas mismas. La palabra contexto, tal como se utiliza en los Lineamientos Curriculares[18], se refiere tanto al contexto más amplio –al entorno sociocultural, al ambiente local, regional, nacional e internacional– como al contexto intermedio de la institución escolar –en donde se viven distintas situaciones y se estudian distintas áreas– y al contexto inmediato de aprendizaje preparado por el docente en el espacio del aula, con la creación de situaciones referidas a las matemáticas, a otras áreas, a la vida escolar y al mismo entorno sociocultural, etc., o a situaciones hipotéticas y aun fantásticas, a partir de las cuales los alumnos puedan pensar, formular, discutir, argumentar y construir conocimiento en forma significativa y comprensiva.

Por ello también se podría decir, como se dijo con respecto a los procesos generales y a los tipos de pensamiento, que hay al menos tres tipos o niveles de contexto o, si se prefiere, que hay tres contextos distintos pero muy relacionados entre sí: *el contexto inmediato* o contexto de aula, creado por la disposición de las paredes, ventanas, muebles

[18] Ministerio de Educación Nacional (1998). *Matemáticas. Lineamientos curriculares*. MEN. Bogotá, págs. 36, 38, 41 y 42.

y materiales, por las normas explícitas o implícitas con las que se trabaja en clase y por la situación problema preparada por el docente; *el contexto escolar* o contexto institucional, configurado por los escenarios de las distintas actividades diarias, la arquitectura escolar, las tradiciones y los saberes de los estudiantes, docentes, empleados administrativos y directivos, así como por el PEI, las normas de convivencia, el currículo explícito de las distintas áreas curriculares y el llamado "currículo oculto" de la institución, y el *contexto extraescolar* o contexto sociocultural, conformado por todo lo que pasa fuera de la institución en el ambiente de la comunidad local, de la región, el país y el mundo.

Cuando se habla de preparar situaciones problema, proyectos de aula, unidades o proyectos integrados, actividades y otras situaciones de aprendizaje, se suele decir que éstas deben ser adaptadas al contexto o tomadas del contexto. Esta recomendación suele entenderse como la búsqueda de una relación cercana con el contexto extraescolar o sociocultural de los estudiantes; dicha relación es importante para despertar su interés y permitirles acceder a las actividades con una cierta familiaridad y comprensión previa, pero no puede olvidarse que este contexto extraescolar o sociocultural no se reduce al vecindario, al municipio, al departamento o a la región, sino que se extiende al país y a todo el planeta Tierra, y tal vez al universo entero, pues para muchos estudiantes el espacio, los planetas, el sistema solar, las estrellas, constelaciones y galaxias son tan cercanas a su interés y a sus afectos como los accidentes geográficos de sus pueblos y ciudades.

Esta útil recomendación de tener muy en cuenta el contexto extraescolar o sociocultural para el diseño y planeación de las actividades y situaciones de clase no puede servir de excusa para no trabajar también situaciones problema relacionadas con el contexto escolar o institucional, en particular con las actividades que ocurren en las clases de distintas áreas curriculares como el lenguaje, las ciencias sociales y las naturales, la educación física y la artística, de las cuales pueden tomarse provechosamente muchos temas y situaciones muy bien contextualizadas para el trabajo matemático. Igualmente, dentro del ambiente de trabajo que se crea en la clase de matemáticas se pueden diseñar situaciones problema que a un observador externo le pueden parecer puramente teóricas y alejadas del contexto extraescolar o del sociocultural, pero que pueden estar muy bien contextualizadas en el ambiente de estudio e investigación matemática que el docente ha logrado crear en el contexto inmediato de su aula.

Así pues, los contextos, los tipos de pensamiento con sus sistemas conceptuales y simbólicos más afines y los procesos generales de la actividad matemática se entrecruzan en cada clase, en cada situación problema, en cada unidad temática, proyecto de aula o período académico. En la misma forma, los Estándares Básicos de Competencias en matemáticas se distribuyen según los tipos de pensamiento y sus sistemas, pero involucran también los procesos generales, reflejan los que tradicionalmente se habían llamado "los contenidos del área", o sea, los conceptos y procedimientos de las matemáticas, y se refieren a los contextos en los cuales se pueden alcanzar y ojalá superar los niveles de competencia seleccionados como estándares para cada conjunto de grados. A su vez, la competencia profesional del docente de matemáticas se muestra precisamente en su manera de navegar en medio de tantas corrientes y vientos cruzados, ante todo en la toma de decisiones previas a la realización de cada actividad, en las que es necesario tomar continuamente en el curso de la misma y en las que se toman después de ella como resultado de la evaluación que el docente hace de sus alumnos y del éxito de la actividad misma.

Sobre la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación

Conforme a los planteamientos expuestos en el apartado anterior, la enseñanza de las matemáticas supone un conjunto de variados procesos mediante los cual el docente planea, gestiona y propone situaciones de aprendizaje matemático significativo y comprensivo –y en particular situaciones problema– para sus alumnos y así permite que ellos desarrollen su actividad matemática e interactúen con sus compañeros, profesores y materiales para reconstruir y validar personal y colectivamente el saber matemático. Para comprender de forma más detallada cómo y qué aspectos deben impulsarse, a continuación se describen y analizan algunas maneras de dinamizar estas interacciones.

Partir de situaciones de aprendizaje significativo y comprensivo de las matemáticas

Las situaciones de aprendizaje significativo y comprensivo en las matemáticas escolares son situaciones que superan el aprendizaje pasivo, gracias a que generan contextos accesibles a los intereses y a las capacidades intelectuales de los estudiantes y, por tanto, les permiten buscar y definir interpretaciones, modelos y problemas, formular estrategias de solución y usar productivamente materiales manipulativos, representativos y tecnológicos.

En la comunidad de educadores matemáticos se distingue hoy claramente entre *situación* y *actividad*. Por *situación* se entiende el conjunto de problemas, proyectos, investigaciones, construcciones, instrucciones y relatos que se elaboran basados en las matemáticas, en otras ciencias y en los contextos cotidianos y que en su tratamiento generan el aprendizaje de los estudiantes. En sus experiencias con el tratamiento de una situación bien preparada, el conocimiento surge en ellos como la herramienta más eficaz en la solución de los problemas relacionados con la misma.

Por su parte, la *actividad* se refiere al trabajo intelectual personal y grupal de los estudiantes, tales como definir estrategias para interpretar, analizar, modelar y reformular la situación; formular preguntas y problemas, conjeturas o hipótesis; explicar, justificar (y aun demostrar) o refutar sus conjeturas e hipótesis; utilizar materiales manipulativos; producir, interpretar y transformar representaciones (verbales, gestuales, gráficas, algebraicas, tabulares, etc.); calcular con lápiz y papel o emplear calculadoras y hojas de cálculo u otros programas de computador; comparar y discutir resultados producidos con o sin computador; redactar y presentar informes, etc. En este sentido, la *actividad* estimulada por la situación permite avanzar y profundizar en la comprensión, en las habilidades y en las actitudes de los estudiantes, en una palabra: en las competencias matemáticas.

La situación problema apunta siempre a distintos contenidos y hacia diversas estructuras matemáticas, pero éstos no son evidentes en sí mismos, sino que tienen que ser interpretados activamente por los estudiantes. En esta interpretación intervienen tanto factores sociales y culturales propios de la clase de matemáticas, como los que median a través del ambiente de aprendizaje y el clima institucional y los que provienen del contexto extraescolar. Es importante señalar que un mismo contenido matemático puede –y en ocasiones debe– presentarse a través de diversas situaciones, como es el caso de la multiplicación y sus diversos significados, de las fracciones y sus diversas interpretaciones, etc.

La importancia de la naturaleza y la variedad de situaciones es un aspecto determinante para la calidad de las actividades de los estudiantes. Es necesario señalar que las actividades de los estudiantes están influenciadas por el tipo de instrucciones con que se presentan las situaciones, por el tipo de preguntas que se proponen en ellas, por los materiales utilizados y por las formas de enseñanza, guía y apoyo de los docentes que median en el tratamiento de la misma.

Diseñar procesos de aprendizaje mediados por escenarios culturales y sociales

El aprendizaje se propone como un proceso activo que emerge de las interacciones entre estudiantes y contextos, entre estudiantes y estudiantes y entre estudiantes y profesores en el tratamiento de las situaciones matemáticas. Estas formas de interacción tienen importancia capital para la comunicación y la negociación de significados. Por ello se enfatiza en el diseño de situaciones matemáticas que posibiliten a los estudiantes tomar decisiones; exponer sus opiniones y ser receptivos a las de los demás; generar discusión y desarrollar la capacidad de justificar las afirmaciones con argumentos. Todo ello conlleva a incluir en la organización del aprendizaje matemático el trabajo en equipo y a fomentar la cooperación entre los estudiantes, la cual no excluye momentos de competición sana y leal entre ellos o con otros cursos, grados y colegios.

Al momento de iniciar el aprendizaje de un nuevo concepto, lo que el estudiante ya sabe sobre ese tema de las matemáticas (formal o informalmente), o sea, sus concepciones previas, sus potencialidades y sus actitudes, son la base de su proceso de aprendizaje.

Fomentar en los estudiantes actitudes de aprecio, seguridad y confianza hacia las matemáticas

Al momento de iniciar el aprendizaje de un nuevo concepto, lo que el estudiante ya sabe sobre ese tema de las matemáticas (formal o informalmente), o sea, sus concepciones previas, sus potencialidades y sus actitudes, son la base de su proceso de aprendizaje. Así al docente le parezca que las concepciones previas son erróneas, las potencialidades mínimas y las actitudes negativas, no dispone de otra base para que el estudiante mismo inicie activamente sus procesos de aprendizaje. Sólo a partir de ellas puede empezar a cuestionar las preconcepciones, a incrementar las potencialidades y a modificar las actitudes para que el progreso en los saberes conceptuales y procedimentales le vaya dando la seguridad y la confianza en que puede avanzar hacia nuevos aprendizajes. En ocasiones, estos saberes previos deben ampliarse a redes conceptuales más generales, reconstruirse, o incluso descartarse como inútiles por el mismo estudiante, pero en ningún caso descalificarse o ser objeto de burla o reprensión por parte de profesores y compañeros. Esta construcción y reconstrucción de sentidos y significados matemáticos, que el estudiante vive en la tensión entre lo que ya sabe o cree saber y lo que se le propone para aprender, genera en él una posición activa y una actitud positiva para enfrentar esos nuevos aprendizajes.

Si bien esta consideración cuidadosa y respetuosa de las concepciones previas del estudiante, de sus potencialidades y de sus actitudes hacia las matemáticas es característica de una posición constructivista del aprendizaje, también es necesario reconocer que es una característica distintiva de muchas otras propuestas actuales en la pedagogía de las matemáticas y, en particular, de las teorías del aprendizaje significativo y de la enseñanza para la comprensión. El reconocimiento de nociones y conocimientos previos, potencialidades, y actitudes del estudiante pone de manifiesto –entre otras– dos cuestiones importantes: de un lado, el reconocimiento de que el estudiante nunca parte de cero para desarrollar sus procesos de aprendizaje y, de otro, el reconocimiento de su papel activo cuando se enfrenta a las situaciones problema propuestas en el aula de clase.

Vencer la estabilidad e inercia de las prácticas de la enseñanza

Como se mencionó antes, desarrollar las competencias matemáticas supone organizar procesos de enseñanza y aprendizaje basados en estructuras curriculares dinámicas que se orienten hacia el desarrollo de competencias. Esto obliga al diseño de procesos, situaciones y actividades contextualizadas en situaciones que portan una visión integral del conocimiento matemático, centradas en el desarrollo de las competencias matemáticas, orientadas a alcanzar las dimensiones políticas, culturales y sociales de la educación matemática. Estos elementos imprimen nuevas dinámicas a las prácticas escolares de enseñar y aprender matemáticas que ayudan a estructurar los procesos curriculares y a planear las actividades de aula.

De igual modo, es necesario ampliar la visión sobre los textos escolares y las directivas ministeriales como los únicos medios para hacer explicitas las exigencias del cambio. Se trata de generar la necesidad de mirar críticamente la amplia oferta de textos escolares que se encuentra en el mercado, de tal forma que se tenga una vigilancia crítica por parte de los docentes sobre la pertinencia, concordancia y coherencia de éstos con los fines de la educación y las políticas del sistema educativo, en particular con los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencias. Se trata también de ampliar, profundizar, y por que no, de trascender los textos escolares y los documentos oficiales a través de una amplia documentación bibliográfica, disponible hoy en día en múltiples formatos (impresos y digitales) que se pueden obtener a través del Ministerio de Educación Nacional, las Secretarías de Educación Departamental y Municipal, las bibliotecas y centros de documentación de las alcaldías y universidades, la consulta en Internet y el intercambio con otros colegas.

Así mismo, la conformación de grupos de trabajo por departamento en cada institución, o de grupos informales de autoformación y de investigación, dejará atrás las propuestas de los textos escolares y de los documentos oficiales en el avance de los docentes hacia el perfeccionamiento de sus conocimientos matemáticos, pedagógicos y didácticos, de sus estrategias de enseñanza y del logro de aprendizajes significativos y comprensivos en sus estudiantes, que ojalá los lleven mucho más allá de lo que proponen los estándares para cada conjunto de grados.

Aprovechar la variedad y eficacia de los recursos didácticos

Los recursos didácticos, entendidos no sólo como el conjunto de materiales apropiados para la enseñanza, sino como todo tipo de soportes materiales o virtuales sobre los cuales se estructuran las situaciones problema más apropiadas para el desarrollo de la actividad matemática de los estudiantes, deben ser analizados en términos de los elementos conceptuales y procedimentales que efectivamente permiten utilizarlos si ya están disponibles, o si no existen, diseñarlos y construirlos.

Dicho de otra manera, cada conjunto de recursos, puestos en escena a través de una situación de aprendizaje significativo y comprensivo, permite recrear ciertos elementos estructurales de los conceptos y de los procedimientos que se proponen para que los estudiantes los aprendan y ejerciten y, así, esa situación ayuda a profundizar y consolidar los distintos procesos generales y los distintos tipos de pensamiento matemático. En este sentido, a través de las situaciones, los recursos se hacen mediadores eficaces en la apropiación de conceptos y procedimientos básicos de las matemáticas y en el avance hacia niveles de competencia cada vez más altos.

Los recursos didácticos pueden ser materiales estructurados con fines educativos (regletas, fichas, cartas, juegos, modelos en cartón, madera o plástico, etc.); o tomados de otras disciplinas y contextos para ser adaptados a los fines que requiera la tarea. Entre estos recursos, pueden destacarse aquellos configurados desde ambientes informáticos como calculadoras, software especializado, páginas interactivas de Internet, etc. Estos ambientes informáticos, que bien pueden estar presentes desde los primeros años de la Educación Básica, proponen nuevos retos y perspectivas a los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas en tanto que permiten reorganizaciones curriculares, pues no sólo realizan de manera rápida y eficiente tareas rutinarias, sino que también integran diferentes tipos de representaciones para el tratamiento de los conceptos (tablas, gráficas, ecuaciones, simulaciones, modelaciones, etc.). Todo esto facilita a los alumnos centrarse en los procesos de razonamiento propio de las matemáticas y, en muchos casos, puede poner a su alcance problemáticas antes reservadas a otros niveles más avanzados de la escolaridad[19].

Refinar los procesos de evaluación

La evaluación formativa ha de poner énfasis en la valoración permanente de las distintas actuaciones de los estudiantes cuando interpretan y tratan situaciones matemáticas y a partir de ellas formulan y solucionan problemas. Estas actuaciones se potencian cuando el docente mantiene siempre la exigencia de que los estudiantes propongan interpretaciones y conjeturas; proporcionen explicaciones y ampliaciones; argumenten, justifiquen y expliquen los procedimientos seguidos o las soluciones propuestas[20].

La evaluación formativa como valoración permanente integra la observación atenta y paciente como herramienta necesaria para obtener información sobre la interacción entre estudiantes, entre éstos y los materiales y recursos didácticos y sobre los procesos generales de la actividad matemática tanto individual como grupal. Para obtener información de calidad sobre las actividades de los estudiantes es necesario precisar los criterios de referencia acordes con lo que se cree es el nivel exigible de la actividad matemática del estudiante en el conjunto de grados al que pertenece. No puede olvidarse que la calidad de los juicios que se emitan sobre el avance en los niveles de competencia de los estudiantes depende de un amplio número de evidencias de las actuaciones de los estudiantes, obtenidas de diversas fuentes de información y de

[19] Respecto a este tema de los medios informáticos en la enseñanza de las matemáticas existe una amplia documentación publicada por el MEN, la cual se referencia en la Bibliografía.

[20] Wiske, M. S. (Comp.). (2003). *La enseñanza para la comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica*. Paidós. Buenos Aires, Barcelona, México, págs. 115-120. Ver también: República de Colombia-Ministerio de Educación Nacional (1997). *Pequeños aprendices, grandes comprensiones* (Rosario Jaramillo Franco, Directora General de la Obra, 2 vols.). MEN. Bogotá, vol. 1, págs. 95-107.

distintas situaciones que estimulen las producciones orales, gestuales, pictóricas y escritas. El registro de las evidencias por parte del docente, complementado con los registros que cada estudiante debe llevar de su propio trabajo –carpetas para la Básica Primaria y diarios de clase y portafolios para la Básica Secundaria y la Media– ayuda para que los estudiantes se apropien de su propio avance y asuman la responsabilidad conjunta en su aprendizaje.

La estructura de los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas

Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas seleccionan algunos de los niveles de avance en el desarrollo de las competencias asociadas con los cinco tipos de pensamiento matemático: numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional. Por ello aparecen en cinco columnas que corresponden a cada uno de dichos tipos de pensamiento y a los sistemas conceptuales y simbólicos asociados a él, aunque muchos de esos estándares se refieran también a otros tipos de pensamiento y a otros sistemas.

En forma semejante, cada estándar de cada columna pone el énfasis en uno o dos de los cinco procesos generales de la actividad matemática que cruzan dichos tipos de pensamiento (formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar, y formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos), pero suele referirse también a otros procesos generales que pueden practicarse en distintos contextos para contribuir a superar el nivel seleccionado como estándar.

Los estándares se distribuyen en cinco conjuntos de grados (primero a tercero, cuarto a quinto, sexto a séptimo, octavo a noveno y décimo a undécimo) para dar mayor flexibilidad a la distribución de las actividades dentro del tiempo escolar y para apoyar al docente en la organización de ambientes y situaciones de aprendizaje significativo y comprensivo que estimulen a los estudiantes a superar a lo largo de dichos grados los niveles de competencia respectivos y, ojalá, a ir mucho más allá de lo especificado en los estándares de ese conjunto de grados.

El conjunto de estándares debe entenderse en términos de procesos de desarrollo de competencias que se desarrollan gradual e integradamente, con el fin de ir superando niveles de complejidad creciente en el desarrollo de las competencias matemáticas a lo largo del proceso educativo. Los estándares presentados a continuación no deben pues entenderse como metas que se puedan delimitar en un tiempo fijo determinado, sino que éstos identifican niveles de avance en procesos graduales que, incluso, no son terminales en el conjunto de grados para el que se proponen. Dicho de otra manera, si en un conjunto de dos grados se proponen 12 estándares para un determinado pensamiento, ello no significa que éstos pueden dividirse por partes iguales entre los grados de dicho conjunto (por ejemplo, seis para un grado y seis para el otro), ni menos todavía puede pensarse en una separación por periodos del año escolar claramente delimitados para cada uno de esos estándares. Por el contrario, se debe procurar una organización del trabajo escolar que garantice un trabajo integrado de todos los estándares correspondientes a mismo grupo de grados y que atienda a su conexión con los estándares de los grados anteriores y de los siguientes (ver más abajo la sección sobre coherencia vertical y horizontal de los estándares).

Si bien en este libro el capítulo de los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas se encuentra separado de los de otras áreas y del de las competencias ciudadanas y, además, los estándares están distribuidos por columnas correspondientes a cada tipo de pensamiento y a sus sistemas asociados, esta organización responde exclusivamente a una necesidad analítica, pues en la práctica del diseño de situaciones de aprendizaje es conveniente que se integren estándares de varios tipos de pensamiento matemático y de una o más áreas diferentes. En una misma situación problema del área de matemáticas –y más todavía en proyectos integrados de dos o más de ellas– usualmente se involucran conceptos, proposiciones, teorías y procedimientos de diferentes áreas, distintos tipos de pensamiento matemático y todos los procesos generales, y en el aprendizaje de un determinado concepto es necesario ubicarlo y utilizarlo en los distintos contextos.

Se trata, entonces, de comprender que la organización curricular de cada institución, en coherencia con su PEI, debe buscar el desarrollo de un trabajo integrado en los distintos pensamientos, más que el progreso en cada uno de ellos independientemente de los demás. Esto se logra si el desarrollo del trabajo en el aula se piensa desde las situaciones de aprendizaje –y en particular desde las situaciones problema– más que desde los contenidos, para aprovechar de esta forma en cada situación las posibilidades de relacionar los distintos estándares y los diferentes tipos de pensamiento matemático. Así mismo, en cada institución se pueden coordinar docentes de distintas áreas para proponer proyectos integrados que integren dos o más de ellas a lo largo de actividades programadas para resolver problemas de la institución o del entorno, o articuladas alrededor de tópicos generadores, narraciones o proyectos productivos[21]. A través de uno solo de estos proyectos integrados debidamente diseñado y gestionado, los estudiantes pueden avanzar con mucha motivación y satisfacción en distintas competencias relacionadas con varias áreas y llegar a superar varios de los estándares de esas áreas para un conjunto de grados y aun para otros conjuntos de grados más avanzados.

La manera como está formulado cada estándar

Así entonces, los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas que aparecen en cada una de las cinco columnas, que están encabezadas por el tipo de pensamiento respectivo y los sistemas asociados a él, se refieren también a la siguiente estructura:

Procesos generales ⟷ Conceptos y procedimientos matemáticos ⟷ Contextos

La estructura descrita es evidente en tanto los cinco procesos generales que se proponen en los Lineamientos Curriculares para toda actividad matemática y que se describieron arriba (formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar, y formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos) constituyen las actividades intelectuales que van a permitir a los estudiantes alcanzar y superar un nivel suficiente en las competencias; de igual manera,

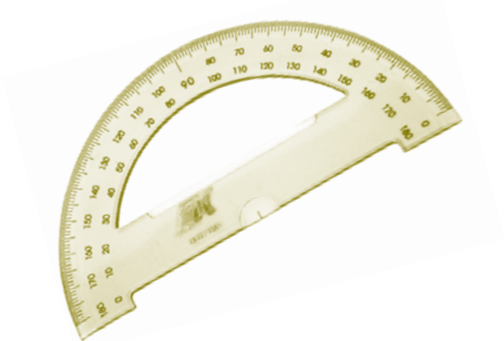
[21] República de Colombia-Ministerio de Educación Nacional (1997). *Pequeños aprendices, grandes comprensiones* (Rosario Jaramillo Franco, Directora General de la Obra, 2 vols.). MEN. Bogotá. Sobre integración curricular, ver también:
Vasco, C. E.; Bermúdez, A.; Escobedo, H.; Negret, J. C. y León, T. (1999). *El saber tiene sentido. Una propuesta de integración curricular*. CINEP. Bogotá.

tal como se ha descrito, el desarrollo de las competencias es mediado por diferentes contextos, ambientes y situaciones de aprendizaje significativo y comprensivo de las matemáticas, en donde procesos generales como la comunicación y el razonamiento son esenciales para todos ellos.

Los estándares para cada pensamiento están basados en la interacción entre la faceta práctica y la formal de las matemáticas y entre el conocimiento conceptual y el procedimental. Esta propuesta requiere reconocer que si bien el aprendizaje de las matemáticas se inicia en las matemáticas informales de los estudiantes en contextos del mundo real y cotidiano escolar y extraescolar, se requiere entretejer los hilos de aprendizaje para construir contextos y situaciones que permitan avanzar hacia las matemáticas formales. El tejido de estos hilos requiere aceptar, tal como se ha descrito en cada pensamiento, que un concepto matemático admite diversas aproximaciones, como por ejemplo, los distintos significados de las fracciones o los significados de la multiplicación presentes en la estructura multiplicativa; del mismo modo, las proposiciones acerca de las propiedades de las operaciones numéricas, de las figuras geométricas, etc., pueden alcanzarse usualmente por más de una vía.

En cuanto a cada uno de los cinco tipos de pensamiento (numérico, espacial, métrico, variacional y aleatorio), si bien es necesario distinguir procesos y procedimientos asociados a cada uno de esos tipos (por ejemplo, para el numérico, la lectura y escritura de números), también es necesario reconocer que algunos son transversales a varios de ellos, como es el caso de los procedimientos asociados a las representaciones gráficas, pues el uso de gráficas incluye la representación lineal de los números en la recta numérica; la representación de conceptos geométricos por medio de figuras; las representaciones de relaciones entre dos variables por medio de gráficas cartesianas o las representaciones en gráficos de barras en los sistemas de datos.

A medida que los estudiantes avanzan en la Educación Básica y Media, la complejidad conceptual de sus conocimientos no se evidencia sólo en los aspectos formales de la disciplina que ellos pueden expresar verbalmente o por escrito, sino también en el tipo de procesos generales de la actividad matemática que pueden realizar con solvencia, eficacia y actitud positiva. A medida que los estudiantes vayan disponiendo de mejores comprensiones conceptuales, van a poder desarrollar procesos de mayor complejidad y estarán en capacidad de enfrentar el tratamiento de situaciones de mayor nivel de abstracción. Así, los contextos y situaciones dentro de los cuales los estudiantes pueden desplegar su actividad matemática pueden y deben involucrar mayores niveles de complejidad y ofrecerles desafíos cada vez más retadores, para darles oportunidad de avanzar en los niveles de competencia matemática señalados en los estándares del conjunto de grados respectivo y, ojalá, para superarlos ampliamente.



Coherencia vertical y horizontal

La complejidad conceptual y la gradualidad del aprendizaje de las matemáticas a las que ya se hizo mención exigen en los estándares una alta coherencia tanto vertical como horizontal. La primera está dada por la relación de un estándar con los demás estándares del mismo pensamiento en los otros conjuntos de grados. La segunda está dada por la relación que tiene un estándar determinado con los estándares de los demás pensamientos dentro del mismo conjunto de grados.

Un ejemplo de la coherencia vertical y de la horizontal se presenta en el diagrama siguiente, que toma distintos estándares relacionados con el pensamiento métrico. Así, la coherencia vertical se hace evidente en el primer ejemplo, porque –si bien el contenido matemático es el mismo: la medición– aquello que varía en los estándares de pensamiento métrico de un conjunto de grados a otro es la complejidad y precisión del proceso de medición o la de las unidades utilizadas. La coherencia horizontal también es clara en el ejemplo siguiente, porque en los procesos de medición (pensamiento métrico) es necesario describir la situación numéricamente (por ejemplo un área o volumen, la hora del día, la temperatura del salón, etc., en donde los resultados de las mediciones implican el pensamiento numérico); tener en cuenta las características geométricas de los patrones y gráficos usados para describir los datos (por ejemplo, si en los pictogramas o en las gráficas de barras es importante sólo la altura o también el área de la barra, como sí es importante en las gráficas circulares, lo que involucra el pensamiento espacial) y seleccionar los tipos de gráficas y las convenciones necesarias para traducir los datos numéricos de las tablas de datos en el tipo de gráfica seleccionado (pensamiento aleatorio).

Coherencia vertical

De 10º a 11º: Diseño estrategias para abordar situaciones de medición que requieran grados de precisión específicos.

De 8º a 9º: Justifico la pertinencia de utilizar unidades de medida estandarizadas en situaciones tomadas de distintas ciencias.

De 6º a 7º: Identifico relaciones entre distintas unidades utilizadas para medir cantidades de la misma magnitud.

De 4º a 5º: Selecciono unidades, tanto convencionales como estandarizadas, apropiadas para diferentes mediciones.

De 1º a 3º
Pensamiento métrico

Realizo y describo procesos de medición con patrones arbitrarios y algunos estandarizados, de acuerdo al contexto.

Pensamiento Numérico: Describo, comparo y cuantifico situaciones con números, en diferentes contextos y con diversas representaciones.

Pensamiento Geométrico: Reconozco congruencia y semejanza entre figuras (ampliar, reducir).

Pensamiento Aleatorio: Represento datos relativos a mi entorno usando objetos concretos, pictogramas y diagramas de barras.

Coherencia horizontal

Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas

Primero a tercero

Al terminar tercer grado...

PENSAMIENTO NUMÉRICO Y SISTEMAS NUMÉRICOS	PENSAMIENTO ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMÉTRICOS
• Reconozco significados del número en diferentes contextos (medición, conteo, comparación, codificación, localización entre otros). • Describo, comparo y cuantifico situaciones con números, en diferentes contextos y con diversas representaciones. • Describo situaciones que requieren el uso de medidas relativas. • Describo situaciones de medición utilizando fracciones comunes. • Uso representaciones –principalmente concretas y pictóricas– para explicar el valor de posición en el sistema de numeración decimal. • Uso representaciones –principalmente concretas y pictóricas– para realizar equivalencias de un número en las diferentes unidades del sistema decimal. • Reconozco propiedades de los números (ser par, ser impar, etc.) y relaciones entre ellos (ser mayor que, ser menor que, ser múltiplo de, ser divisible por, etc.) en diferentes contextos. • Resuelvo y formulo problemas en situaciones aditivas de composición y de transformación. • Resuelvo y formulo problemas en situaciones de variación proporcional. • Uso diversas estrategias de cálculo (especialmente cálculo mental) y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas. • Identifico, si a la luz de los datos de un problema, los resultados obtenidos son o no razonables. • Identifico regularidades y propiedades de los números utilizando diferentes instrumentos de cálculo (calculadoras, ábacos, bloques multibase, etc.). Matemáticas	• Diferencio atributos y propiedades de objetos tridimensionales. • Dibujo y describo cuerpos o figuras tridimensionales en distintas posiciones y tamaños. • Reconozco nociones de horizontalidad, verticalidad, paralelismo y perpendicularidad en distintos contextos y su condición relativa con respecto a diferentes sistemas de referencia. • Represento el espacio circundante para establecer relaciones espaciales. • Reconozco y aplico traslaciones y giros sobre una figura. • Reconozco y valoro simetrías en distintos aspectos del arte y el diseño. • Reconozco congruencia y semejanza entre figuras (ampliar, reducir). • Realizo construcciones y diseños utilizando cuerpos y figuras geométricas tridimensionales y dibujos o figuras geométricas bidimensionales. • Desarrollo habilidades para relacionar dirección, distancia y posición en el espacio. 1º - 3º

PENSAMIENTO MÉTRICO Y SISTEMAS DE MEDIDAS	PENSAMIENTO ALEATORIO Y SISTEMAS DE DATOS	PENSAMIENTO VARIACIONAL Y SISTEMAS ALGEBRAICOS Y ANALÍTICOS
• Reconozco en los objetos propiedades o atributos que se puedan medir (longitud, área, volumen, capacidad, peso y masa) y, en los eventos, su duración. • Comparo y ordeno objetos respecto a atributos medibles. • Realizo y describo procesos de medición con patrones arbitrarios y algunos estandarizados, de acuerdo al contexto. • Analizo y explico sobre la pertinencia de patrones e instrumentos en procesos de medición. • Realizo estimaciones de medidas requeridas en la resolución de problemas relativos particularmente a la vida social, económica y de las ciencias. • Reconozco el uso de las magnitudes y sus unidades de medida en situaciones aditivas y multiplicativas.	• Clasifico y organizo datos de acuerdo a cualidades y atributos y los presento en tablas. • Interpreto cualitativamente datos referidos a situaciones del entorno escolar. • Describo situaciones o eventos a partir de un conjunto de datos. • Represento datos relativos a mi entorno usando objetos concretos, pictogramas y diagramas de barras. • Identifico regularidades y tendencias en un conjunto de datos. • Explico –desde mi experiencia– la posibilidad o imposibilidad de ocurrencia de eventos cotidianos. • Predigo si la posibilidad de ocurrencia de un evento es mayor que la de otro. • Resuelvo y formulo preguntas que requieran para su solución coleccionar y analizar datos del entorno próximo.	• Reconozco y describo regularidades y patrones en distintos contextos (numérico, geométrico, musical, entre otros). • Describo cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural, dibujos y gráficas. • Reconozco y genero equivalencias entre expresiones numéricas y describo cómo cambian los símbolos aunque el valor siga igual. • Construyo secuencias numéricas y geométricas utilizando propiedades de los números y de las figuras geométricas.

Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas

Cuarto a quinto

Al terminar quinto grado...

PENSAMIENTO NUMÉRICO Y SISTEMAS NUMÉRICOS

- Interpreto las fracciones en diferentes contextos: situaciones de medición, relaciones parte todo, cociente, razones y proporciones.
- Identifico y uso medidas relativas en distintos contextos.
- Utilizo la notación decimal para expresar fracciones en diferentes contextos y relaciono estas dos notaciones con la de los porcentajes.
- Justifico el valor de posición en el sistema de numeración decimal en relación con el conteo recurrente de unidades.
- Resuelvo y formulo problemas cuya estrategia de solución requiera de las relaciones y propiedades de los números naturales y sus operaciones.
- Resuelvo y formulo problemas en situaciones aditivas de composición, transformación, comparación e igualación.
- Resuelvo y formulo problemas en situaciones de proporcionalidad directa, inversa y producto de medidas.
- Identifico la potenciación y la radicación en contextos matemáticos y no matemáticos.
- Modelo situaciones de dependencia mediante la proporcionalidad directa e inversa.
- Uso diversas estrategias de cálculo y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas.
- Identifico, en el contexto de una situación, la necesidad de un cálculo exacto o aproximado y lo razonable de los resultados obtenidos.
- Justifico regularidades y propiedades de los números, sus relaciones y operaciones.

PENSAMIENTO ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMÉTRICOS

- Comparo y clasifico objetos tridimensionales de acuerdo con componentes (caras, lados) y propiedades.
- Comparo y clasifico figuras bidimensionales de acuerdo con sus componentes (ángulos, vértices) y características.
- Identifico, represento y utilizo ángulos en giros, aberturas, inclinaciones, figuras, puntas y esquinas en situaciones estáticas y dinámicas.
- Utilizo sistemas de coordenadas para especificar localizaciones y describir relaciones espaciales.
- Identifico y justifico relaciones de congruencia y semejanza entre figuras.
- Construyo y descompongo figuras y sólidos a partir de condiciones dadas.
- Conjeturo y verifico los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano para construir diseños.
- Construyo objetos tridimensionales a partir de representaciones bidimensionales y puedo realizar el proceso contrario en contextos de arte, diseño y arquitectura.

Matemáticas 4º - 5º

PENSAMIENTO MÉTRICO Y SISTEMAS DE MEDIDAS

- Diferencio y ordeno, en objetos y eventos, propiedades o atributos que se puedan medir (longitudes, distancias, áreas de superficies, volúmenes de cuerpos sólidos, volúmenes de líquidos y capacidades de recipientes; pesos y masa de cuerpos sólidos; duración de eventos o procesos; amplitud de ángulos).
- Selecciono unidades, tanto convencionales como estandarizadas, apropiadas para diferentes mediciones.
- Utilizo y justifico el uso de la estimación para resolver problemas relativos a la vida social, económica y de las ciencias, utilizando rangos de variación.
- Utilizo diferentes procedimientos de cálculo para hallar el área de la superficie exterior y el volumen de algunos cuerpos sólidos.
- Justifico relaciones de dependencia del área y volumen, respecto a las dimensiones de figuras y sólidos.
- Reconozco el uso de algunas magnitudes (longitud, área, volumen, capacidad, peso y masa, duración, rapidez, temperatura) y de algunas de las unidades que se usan para medir cantidades de la magnitud respectiva en situaciones aditivas y multiplicativas.
- Describo y argumento relaciones entre el perímetro y el área de figuras diferentes, cuando se fija una de estas medidas.

PENSAMIENTO ALEATORIO Y SISTEMAS DE DATOS

- Represento datos usando tablas y gráficas (pictogramas, gráficas de barras, diagramas de líneas, diagramas circulares).
- Comparo diferentes representaciones del mismo conjunto de datos.
- Interpreto información presentada en tablas y gráficas. (pictogramas, gráficas de barras, diagramas de líneas, diagramas circulares).
- Conjeturo y pongo a prueba predicciones acerca de la posibilidad de ocurrencia de eventos.
- Describo la manera como parecen distribuirse los distintos datos de un conjunto de ellos y la comparo con la manera como se distribuyen en otros conjuntos de datos.
- Uso e interpreto la media (o promedio) y la mediana y comparo lo que indican.
- Resuelvo y formulo problemas a partir de un conjunto de datos provenientes de observaciones, consultas o experimentos.

PENSAMIENTO VARIACIONAL Y SISTEMAS ALGEBRAICOS Y ANALÍTICOS

- Describo e interpreto variaciones representadas en gráficos.
- Predigo patrones de variación en una secuencia numérica, geométrica o gráfica.
- Represento y relaciono patrones numéricos con tablas y reglas verbales.
- Analizo y explico relaciones de dependencia entre cantidades que varían en el tiempo con cierta regularidad en situaciones económicas, sociales y de las ciencias naturales.
- Construyo igualdades y desigualdades numéricas como representación de relaciones entre distintos datos.

Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas

Sexto a séptimo

Al terminar séptimo grado...

PENSAMIENTO NUMÉRICO Y SISTEMAS NUMÉRICOS

- Resuelvo y formulo problemas en contextos de medidas relativas y de variaciones en las medidas.
- Utilizo números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida.
- Justifico la extensión de la representación polinomial decimal usual de los números naturales a la representación decimal usual de los números racionales, utilizando las propiedades del sistema de numeración decimal.
- Reconozco y generalizo propiedades de las relaciones entre números racionales (simétrica, transitiva, etc.) y de las operaciones entre ellos (conmutativa, asociativa, etc.) en diferentes contextos.
- Resuelvo y formulo problemas utilizando propiedades básicas de la teoría de números, como las de la igualdad, las de las distintas formas de la desigualdad y las de la adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación.
- Justifico procedimientos aritméticos utilizando las relaciones y propiedades de las operaciones.
- Formulo y resuelvo problemas en situaciones aditivas y multiplicativas, en diferentes contextos y dominios numéricos.
- Resuelvo y formulo problemas cuya solución requiere de la potenciación o radicación.
- Justifico el uso de representaciones y procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa e inversa.
- Justifico la pertinencia de un cálculo exacto o aproximado en la solución de un problema y lo razonable o no de las respuestas obtenidas.
- Establezco conjeturas sobre propiedades y relaciones de los números, utilizando calculadoras o computadores.
- Justifico la elección de métodos e instrumentos de cálculo en la resolución de problemas.
- Reconozco argumentos combinatorios como herramienta para interpretación de situaciones diversas de conteo.

PENSAMIENTO ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMÉTRICOS

- Represento objetos tridimensionales desde diferentes posiciones y vistas.
- Identifico y describo figuras y cuerpos generados por cortes rectos y transversales de objetos tridimensionales.
- Clasifico polígonos en relación con sus propiedades.
- Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte.
- Resuelvo y formulo problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones visuales.
- Resuelvo y formulo problemas usando modelos geométricos.
- Identifico características de localización de objetos en sistemas de representación cartesiana y geográfica.

Matemáticas 6^0 - 7^0

PENSAMIENTO MÉTRICO Y SISTEMAS DE MEDIDAS	PENSAMIENTO ALEATORIO Y SISTEMAS DE DATOS	PENSAMIENTO VARIACIONAL Y SISTEMAS ALGEBRAICOS Y ANALÍTICOS
• Utilizo técnicas y herramientas para la construcción de figuras planas y cuerpos con medidas dadas. • Resuelvo y formulo problemas que involucren factores escalares (diseño de maquetas, mapas). • Calculo áreas y volúmenes a través de composición y descomposición de figuras y cuerpos. • Identifico relaciones entre distintas unidades utilizadas para medir cantidades de la misma magnitud. • Resuelvo y formulo problemas que requieren técnicas de estimación.	• Comparo e interpreto datos provenientes de diversas fuentes (prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas, entrevistas). • Reconozco la relación entre un conjunto de datos y su representación. • Interpreto, produzco y comparo representaciones gráficas adecuadas para presentar diversos tipos de datos. (diagramas de barras, diagramas circulares.) • Uso medidas de tendencia central (media, mediana, moda) para interpretar comportamiento de un conjunto de datos. • Uso modelos (diagramas de árbol, por ejemplo) para discutir y predecir posibilidad de ocurrencia de un evento. • Conjeturo acerca del resultado de un experimento aleatorio usando proporcionalidad y nociones básicas de probabilidad. • Resuelvo y formulo problemas a partir de un conjunto de datos presentados en tablas, diagramas de barras, diagramas circulares. • Predigo y justifico razonamientos y conclusiones usando información estadística.	• Describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas). • Reconozco el conjunto de valores de cada una de las cantidades variables ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio (variación). • Analizo las propiedades de correlación positiva y negativa entre variables, de variación lineal o de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa en contextos aritméticos y geométricos. • Utilizo métodos informales (ensayo y error, complementación) en la solución de ecuaciones. • Identifico las características de las diversas gráficas cartesianas (de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.) en relación con la situación que representan.

Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas

Octavo a noveno

Al terminar noveno grado...

PENSAMIENTO NUMÉRICO Y SISTEMAS NUMÉRICOS

- Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos.
- Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos.
- Utilizo la notación científica para representar medidas de cantidades de diferentes magnitudes.
- Identifico y utilizo la potenciación, la radicación y la logaritmación para representar situaciones matemáticas y no matemáticas y para resolver problemas.

PENSAMIENTO ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMÉTRICOS

- Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas.
- Reconozco y contrasto propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Tales).
- Aplico y justifico criterios de congruencias y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas.
- Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.

Matemáticas 8^0 - 9^0

PENSAMIENTO MÉTRICO Y SISTEMAS DE MEDIDAS	PENSAMIENTO ALEATORIO Y SISTEMAS DE DATOS	PENSAMIENTO VARIACIONAL Y SISTEMAS ALGEBRAICOS Y ANALÍTICOS
• Generalizo procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y el volumen de sólidos. • Selecciono y uso técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados. • Justifico la pertinencia de utilizar unidades de medida estandarizadas en situaciones tomadas de distintas ciencias.	• Reconozco cómo diferentes maneras de presentación de información pueden originar distintas interpretaciones. • Interpreto analítica y críticamente información estadística proveniente de diversas fuentes (prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas, entrevistas. • Interpreto y utilizo conceptos de media, mediana y moda y explicito sus diferencias en distribuciones de distinta dispersión y asimetría. • Selecciono y uso algunos métodos estadísticos adecuados al tipo de problema, de información y al nivel de la escala en la que esta se representa (nominal, ordinal, de intervalo o de razón). • Comparo resultados de experimentos aleatorios con los resultados previstos por un modelo matemático probabilístico. • Resuelvo y formulo problemas seleccionando información relevante en conjuntos de datos provenientes de fuentes diversas. (prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas, entrevistas). • Reconozco tendencias que se presentan en conjuntos de variables relacionadas. • Calculo probabilidad de eventos simples usando métodos diversos (listados, diagramas de árbol, técnicas de conteo). • Uso conceptos básicos de probabilidad (espacio muestral, evento, independencia, etc.).	• Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas. • Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada. • Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas. • Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas. • Identifico diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales. • Analizo los procesos infinitos que subyacen en las notaciones decimales. • Identifico y utilizo diferentes maneras de definir y medir la pendiente de una curva que representa en el plano cartesiano situaciones de variación. • Identifico la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en las gráficas que las representan. • Analizo en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas.

Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas

Décimo a undécimo

Al terminar undécimo grado...

PENSAMIENTO NUMÉRICO Y SISTEMAS NUMÉRICOS	PENSAMIENTO ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMÉTRICOS
• Analizo representaciones decimales de los números reales para diferenciar entre racionales e irracionales. • Reconozco la densidad e incompletitud de los números racionales a través de métodos numéricos, geométricos y algebraicos. • Comparo y contrasto las propiedades de los números (naturales, enteros, racionales y reales) y las de sus relaciones y operaciones para construir, manejar y utilizar apropiadamente los distintos sistemas numéricos. • Utilizo argumentos de la teoría de números para justificar relaciones que involucran números naturales. • Establezco relaciones y diferencias entre diferentes notaciones de números reales para decidir sobre su uso en una situación dada.	• Identifico en forma visual, gráfica y algebraica algunas propiedades de las curvas que se observan en los bordes obtenidos por cortes longitudinales, diagonales y transversales en un cilindro y en un cono. • Identifico características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana y otros (polares, cilíndricos y esféricos) y en particular de las curvas y figuras cónicas. • Resuelvo problemas en los que se usen las propiedades geométricas de figuras cónicas por medio de transformaciones de las representaciones algebraicas de esas figuras. • Uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias. • Describo y modelo fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas. • Reconozco y describo curvas y o lugares geométricos.
Matemáticas	10º - 11º

Nota. La publicación de los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas realizada por el MEN en 2003 salió con algunos errores que se cometieron al momento de diseñar la cartilla. En las tablas anteriores aparece la versión original planteada por los expertos que se encargaron de estructurar los estándares.

PENSAMIENTO MÉTRICO Y SISTEMAS DE MEDIDAS	PENSAMIENTO ALEATORIO Y SISTEMAS DE DATOS	PENSAMIENTO VARIACIONAL Y SISTEMAS ALGEBRAICOS Y ANALÍTICOS
• Diseño estrategias para abordar situaciones de medición que requieran grados de precisión específicos. • Resuelvo y formulo problemas que involucren magnitudes cuyos valores medios se suelen definir indirectamente como razones entre valores de otras magnitudes, como la velocidad media, la aceleración media y la densidad media. • Justifico resultados obtenidos mediante procesos de aproximación sucesiva, rangos de variación y límites en situaciones de medición.	• Interpreto y comparo resultados de estudios con información estadística provenientes de medios de comunicación. • Justifico o refuto inferencias basadas en razonamientos estadísticos a partir de resultados de estudios publicados en los medios o diseñados en el ámbito escolar. • Diseño experimentos aleatorios (de las ciencias físicas, naturales o sociales) para estudiar un problema o pregunta. • Describo tendencias que se observan en conjuntos de variables relacionadas. • Interpreto nociones básicas relacionadas con el manejo de información como población, muestra, variable aleatoria, distribución de frecuencias, parámetros y estadígrafos). • Uso comprensivamente algunas medidas de centralización, localización, dispersión y correlación (percentiles, cuartiles, centralidad, distancia, rango, varianza, covarianza y normalidad). • Interpreto conceptos de probabilidad condicional e independencia de eventos. • Resuelvo y planteo problemas usando conceptos básicos de conteo y probabilidad (combinaciones, permutaciones, espacio muestral, muestreo aleatorio, muestreo con remplazo). • Propongo inferencias a partir del estudio de muestras probabilísticas.	• Utilizo las técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos. • Interpreto la noción de derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de la tangente a una curva y desarrollo métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos. • Analizo las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales y de sus derivadas. • Modelo situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas e interpreto y utilizo sus derivadas.

Herramientas bibliográficas de apoyo

A continuación se ofrecen a los lectores y lectoras unas referencias bibliográficas que pueden resultar de utilidad para seguir ampliando sus conocimientos en el campo de la enseñanza de las matemáticas. Por no tratarse de un censo exhaustivo, cada maestro del país podrá enriquecerla o transformarla, de acuerdo con sus necesidades y con sus facilidades de acceso a los textos referidos.

- Acevedo, M. y García, G. (2000). "La evaluación de las competencias en matemáticas y el currículo: un problema de coherencia y consistencia". En: *Competencias y proyecto pedagógico*. Universidad Nacional de Colombia. Unilibros. Bogotá.
- Álvarez, G.; J. Torres, L. y Guacaneme, E. (1997). *El tercer estudio internacional de matemáticas y ciencias. Análisis y resultados*. Prueba de matemáticas. Ministerio de Educación Nacional–Icfes. Bogotá
- Alsina, C.; Fortuny, J. et al. (1997). *¿Por qué geometría? Propuestas didácticas para la ESO. Educación matemática en secundaria*. Síntesis. Madrid.
- Asocolme (2002). *Estándares curriculares. Área matemáticas: Aportes para el análisis*. Asocolme–Gaia. Bogotá.
- Ausubel, D. P.; Novak, J. D. y Hanesian, H. (1983). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo* (2a. ed.). Trillas. México.
- Barrantes López, Manuel (Ed.). (1998). *La geometría y la formación del profesorado en primaria y secundaria*. Universidad de Extremadura. Mérida.
- Batanero, C. (1998). "Recursos para la educación estadística en internet". En: UNO. *Revista de Didáctica de las Matemáticas*. No. 15. Grao. Barcelona.
- Batanero. C. y Serrano, L. (1995). "La aleatoriedad, sus significados e implicaciones didácticas.". En: UNO. *Revista de Didáctica de las Matemáticas*. No. 5. Grao. Barcelona.
- Batanero, C. (2001). *Presente y futuro de la educación estadística*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Granada.
- Batanero, C. (2002). "Los retos de la cultura estadística". *Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística*. Conferencia inaugural. Buenos Aires.
- Behr, M.; Harel, G.; Post, T., & Silver, E. A. (1992). "Rational number, ratio and proportion". En: D. A. Grouws (ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning. A project of the National Council of Teacher of Mathematics* (pp. 296-333). Macmillan. New York.
- Bishop, A. (1999). *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Paidós. Barcelona.
- Bishop, A. J. (1983). "Space and geometry". En: Richard Lesh & Marsha Landau (eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes*. Academic Press. Orlando, Florida.
- Blythe, T. (1999). *Enseñaza para la comprensión. Guía para el docente*. Paidós. Buenos Aires, Barcelona, México.
- Board of Studies New South Wales. (2002). *Mathematics K–6. Syllabus (incorporating content and outcomes for early stage 1 to stage 4)*. Board of Studies NSW. Australia. Ver el URL: http://k6.boardofstudies.nsw.edu.au
- Bonilla, M. et al. (1999). *La enseñanza de la aritmética escolar y la formación del profesor*. Asocolme-Gaia. Bogotá.
- Camargo, L. y Samper, C. (1997). "Talleres para la enseñanza de algunos conceptos matemáticos en la Educación Básica". En: *XIV Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística*. Universidad Pedagógica Nacional, Universidad Nacional y Universidad Distrital. Bogotá.
- Camargo, L. y Samper, C. (1998). "Didáctica de la geometría la educación Básica Secundaria". En: *XV Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística*. Universidad Pedagógica Nacional, Universidad Nacional y Universidad Distrital. Bogotá.
- Camargo, L. y Samper, C. (1999). "Desarrollo del razonamiento deductivo a través de la geometría euclidiana". En: *Revista TEA: Tecne, Episteme y Didaxis*. Revista de la Facultad de Ciencia y Tecnología de la Universidad Pedagógica Nacional. No. 5. Bogotá.

- Camargo, L.; Samper, C. y García, G. (2000). "Tratamiento de los números enteros en los textos escolares". En: *El oficio de investigar: Educación y pedagogía. Hacia el nuevo milenio*. Centro de Investigaciones de la Universidad Pedagógica Nacional CIUP. Bogotá.
- Camargo, L.; Samper, C. y Leguizamón, C. (2001). "Razonamiento en geometría". En: *Revista EMA, Investigación e innovación en educación matemática*. Vol. 6. No. 2. Marzo de 2001. Bogotá.
- Clements, D. H.; Battista, M. T., & Sarama, J. (2001). *Logo and geometry*. JRME Monograph No. 10. Reston, VA.
- Coxeter, H. S. M. y Greitzer, S. L. (1993). *Retorno a la geometría*. DLS–Euler. Madrid.
- Cordero, O. F. y Solís, M. (1997). *Las gráficas de las funciones como una argumentación de cálculo*. Grupo Editorial Iberoamérica. Cuadernos Didácticos. Vol. 2. México, D. F.
- Chamorro, C. y Belmonte, J. (1994). *El problema de la medida: didáctica de las magnitudes lineales*. (Colección Matemáticas: Cultura y aprendizaje 17). Síntesis. Madrid.
- Chance, B. L. (2002). "Components of statistical thinking and implications for instruction and assessment". En: *Journal of Statistics Education*. Vol. 10. No. 3.
- Del Río, S. J. (1994). *Lugares Geométricos. Cónicas. Educación Matemática en Secundaria*. Síntesis. Madrid
- Del Olmo Romero, M. de los A., Moreno Carretero, F. y Gil Cuadra, F. (1993). *Superficie y volumen:¿ algo más que el trabajo con fórmulas?* Síntesis. Madrid.
- Department for Education and Skills (United Kingdom). Programmes of Study for Mathematics in the National Curriculum for 2000. Ver el URL:

  http://www.standards.dfes.gov.uk/numeracy/
- Devlin, K. (1997). *Mathematics: the science of patterns. The search for order in life, mind and the universe*. Scientific American Library. New York.
- Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (2a. ed.). Peter Lang-Universidad del Valle. Cali. (Original francés publicado en 1995).
- Farfán, R. y Albert, A. (1995). *Un acercamiento gráfico a la resolución de desigualdades con el uso de las calculadoras TI-81 y TI-85*. Cuadernos Didácticos. Grupo Editorial Iberoamérica. México.
- Farmer, D. W. (1996). "Groups and symmetry. A guide to discovering mathematics". En: *Mathematical world*. Vol. 5. American Mathematical Society. Providence, RI.
- Fischbein, E., & Gazit, A. (1984). "¿Does the teaching of probability improve probabilistics intuitions?" En: *Educational Studies in Mathematics*. Vol. 15, 1-24.
- Freudenthal, H. (1977). *Mathematics as an educational task*. D. Reidel. Norwell, Massachusetts.
- Fuys, D.; Geddes, D., & Tischler, R. (1995). *The Van Hiele model of thinking in geometry among adolescents*. The National Council of Teachers of Mathematics. Reston, VA.
- Gálvez, Grecia (1988). "La geometría. La psicogénesis de las nociones espaciales y la enseñanza de la geometría en la escuela primaria". En: Cecilia Parra e Irma Saiz (Comps.). *Didáctica de las matemáticas. Aportes y Reflexiones*. Paidós Educador. Buenos Aires.
- Garfield, J. (2002)."The challenge of developing reasoning". En: *Journal of Statistics Education*. Vol. 10. No. 3. University of Minnesota.
- García, G.; Espitia, L. y Serrano, C. (1995). *Elementos para la construcción de una didáctica de la función*. Serie cuadernos de investigación. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá.
- García, G.; Espitia, L. y Serrano C. (1996). "Situaciones de variación numérica y representaciones asociadas: génesis de la función lineal". En: *Revista Notas de Matemáticas*. No. 36. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá.
- García, G.; Serrano, C. y Espitia L. (1997). *Hacia la noción de función como dependencia*. Cuaderno Didáctico. Colciencias. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá.
- García, G.; Serrano, C. y Díaz H. (1999). "¿Qué hay detrás de las dificultades en la comprensión del número real?". En: *TEA: Tecne, Episteme y Didaxis. (Revista de la Facultad de Ciencia y Tecnología)*. No. 3. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá.
- García, G.; Serrano, C. y Díaz, H. (1999). "Una aproximación epistemológica, didáctica y cognitiva del Cálculo". En: *TEA: Tecne, Episteme y Didaxis. (Revista de la Facultad de Ciencia y Tecnología)*. No 3. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá.
- García, G.; Serrano, C. y Camargo, L. (1998). *Una propuesta curricular para las nociones de función como dependencia y la proporcionalidad como función lineal*. Cuadernos Didácticos. IDEP. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá.

- García, G.; Serrano, C. y Díaz, H. (2002). *La aproximación en la Educación Básica. Un estudio en la educación Básica*. Conciencias y Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá.
- García, G. y Serrano, C. (1999). *La comprensión de la proporcionalidad, una perspectiva cultural*. Cuadernos de matemática educativa. Asociación Colombiana de Matemática Educativa (Asocolme). Bogotá.
- Godino, J. D. y Batanero, C. (2001). "Probabilidad". En: J. D. Godino (ed.), *Matemáticas y su Didáctica para Maestros. Proyecto Edumat-Maestros*. Ver el URL: http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/
- Godino J. D. y Batanero C. (1997). *Semiotic and anthropological approach to research in mathematics education. En: Philosophy of Mathematics Education Journal. Vol. 10. Se encuentra traducido al español bajo el siguiente título: Una aproximación semiótica y antropológica a la investigación en didáctica de las matemáticas*. Ver el URL: http://www.ex.ac.uk/~PErnest/pome10/art7.htm
- Godino, J. D.; Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1987). *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. Síntesis. Madrid.
- Grupo Beta. (1990). *Proporcionalidad geométrica y semejanza*. (Colecciones Matemáticas: Cultura y Aprendizaje. No. 14). Síntesis. Madrid.
- Guillén Soler, G. (1991). *El mundo de los poliedros*. (Colecciones Matemáticas: Cultura y Aprendizaje. No. 14). Síntesis. Madrid.
- Gutiérrez, Á. y Jaime, A. (1995). *Geometría y algunos aspectos generales de la educación matemática*. Una Empresa Docente-Grupo Editorial Iberoamérica. Bogotá.
- Guzmán, M. de (1995)."Tendencias e innovaciones en educación matemática". Conferencia en el Seminario de Educación Matemática. (Documento inédito disponible en la OEI). OEI. Bogotá.
- Guzmán M. de (1993). "Tendencias e innovaciones en educación matemática". En: *Enseñanza de las ciencias y las matemáticas. Tendencias e Innovaciones*. OEI. Tomado del URL: http://www.oei.org.co/oeivirt/ciencias.pdf
- Hart, K. (1993). "Measurement". En: K.M. Hart (ed.), *Children's understanding of mathematics: 11–16* (pp. 9-22). Athenaeum Press. London.
- Hart, K. (1993). "Ratio and proportion". En: K.M. Hart (ed.), *Children's understanding of mathematics: 11–16* (pp. 88-101). Athenaeum Press. London.
- Hernán Siguero, F. y Carrillo, E. (1996). *Recursos en el aula de matemáticas*. Síntesis. Madrid.
- Holden, A. (1991). *Shapes, space, and symmetry with 319 illustrations*. Dover Publications. New York.
- Inhelder, B. y Piaget, J. (1985). *De la lógica del niño a la lógica del adolescente*. Paidós. Barcelona. (Original francés publicado en 1955).
- Jackson, P. W. (Ed.). (1992). *Handbook of research on curriculum: A project of the American Educational Research Association*. Macmillan. New York
- Kaput, J. (1992). *Technology and mathematics educations. En: D. A. Grouws, (ed.), Handbook of Research on Mathematics*. (pp. 515-555). Macmillian. New York.
- Küchemann, D. (1993). "Reflections and rotations". En: K. M. Hart (ed.), *Children´s understanding of mathematics: 11–16*. (pp. 137-157).Athenaeum Press. London.
- Mancera, M. E. (1992). "Significados y significantes relativos a las fracciones". En: *Revista Educación Matemática*. Vol 4. No. 2. Bogotá.
- Mason, J.; Burton, L. y Stacey, K. (1992). *Pensar matemáticamente*. Labor. Barcelona.
- Maza, C. (1995). *Aritmética y representación: de la comprensión del texto al uso de materiales*. Paidós. Barcelona.
- Ministerio de Educación Nacional (1998). *Matemáticas. Lineamientos curriculares*. MEN. Bogotá . (Hay una edición del mismo año en la Cooperativa Editorial Magisterio. Bogotá).
- Ministerio de Educación Nacional (2003). *Memorias del Seminario Nacional Formación de docentes sobre el uso del Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas*. Enlace Editores Ltda. Bogotá.
- Ministerio de Educación Nacional (1999). *Nuevas tecnologías y currículo de matemática*. Serie Lineamientos Curriculares. Punto EXE Editores. Bogotá.
- Ministerio de Educación Nacional (2004). *Pensamiento estadístico y tecnologías computacionales*. Enlace Editores Ltda. Bogotá.
- Ministerio de Educación Nacional (2004). *Pensamiento geométrico y tecnologías computacionales*. Enlace Editores Ltda. Bogotá.
- Ministerio de Educación Nacional (2004). *Pensamiento variacional y tecnologías computacionales*. Enlace Editores Ltda. Bogotá.

- Ministerio de Educación Nacional (2003). *Tecnologías computacionales en el currículo de matemáticas*. Enlace Editores Ltda. Bogotá.
- Monsalve, P. (1996). *Una brisa refrescante para la iniciacion matematica*. Universidad de Antioquia. Facultad de Educación. Medellín.
- Moreno Armella, L. (1991). "En torno a las nociones de número y variación". En: *Revista Mathesis*. Vol. 7. No. 2. Mayo de 1991.
- Moreno, L. (2002). "Fundamentación cognitiva del currículo de Matemáticas". En: *Seminario Nacional de Formación de Docentes: uso de nuevas tecnologías en elaula de matemáticas*. Ministerio de Educación Nacional. Bogotá.
- National Council of Teachers of Matematics (1992). *Learning and teaching geometry, K–12. 1992 Yearbook*. (Lindquist, Mary M., ed.). Reston, VA.
- National Council of Teachers of Mathematics (2002). *Making sense of fractions, ratios, and proportions*. (Bright, George W., & Litwiller, Bonnie, eds.). Reston, VA.
- Novak, J. D. y Gowin, B. (1988). *Aprendiendo a aprender*. Martínez Roca. Barcelona.
- Obando, G. (2002). "De la multiplicación a la proporcionalidad: un largo camino por recorrer". *Memorias del 4º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*. Manizales. (22 págs.).
- Obando, G. (2003). "La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo". En: *Revista EMA (Bogotá)*. Vol 8. No. 2, 157-182.
- Obando, G. y Múnera, J. (2003). "Las situaciones problema como estrategia para la conceptualización matemática". *Revista Educación y Pedagogía (Medellín: Universidad de Antioquia, Facultad de Educación)*. Vol. 15. No. 35, 183-200.
- Obando, G. (2003). "Interpretación y Argumentación en la Clase de Matemáticas Mediada por Herramientas computacionales". *Memorias del XI Congreso Interamericano de Educación Matemática*. Blumenau. Brasil.
- Padilla Díaz, F. et al. (1991). *Circulando por el círculo*. Síntesis. Madrid.
- Parra, C. y Saiz, I. (Comps.). *Didáctica de las matemáticas. Aportes y Reflexiones*. Paidós Educador. Buenos Aires.
- Perkins, D. et al. (1994). *Enseñar a pensar*. Paidós. Barcelona.
- Piaget, J. (1978). *Introducción a la epistemología genética. I. El pensamiento matemático* (2a. ed.). Paidós. Buenos Aires. (Original francés publicado en 1950).
- Pohl, V. (2000). *How to enrich geometry using string designs*. National Council of Teachers of Mathematics. Reston, VA.
- Puig, E. y Cerdan, P. F. (1996). *Problemas aritméticos escolares*. Síntesis. Madrid.
- República de Colombia-Ministerio de Educación Nacional (1997). *Pequeños aprendices, grandes comprensiones* (Rosario Jaramillo Franco, Directora General de la Obra, 2 vols.). MEN. Bogotá.
- Rojas, P. et al. (2002). *La transición aritmética-álgebra*. Gaia. Bogotá.
- Romberg, Thomas (1992). "Características problemáticas del currículo escolar de Matemáticas" (en inglés). En: Philip W. Jackson (ed.), *Handbook of Research on Curriculum: A project of the American Educational Research Association* (3rd ed.). Macmillan. New York.
- Sakata, H. (1992). *Origami*. Graph-Sha. Tokio.
- Schattschneider, Doris y Wallace, Walter (1992). *M.C. Escher. Calidociclos*. Taschen. Madrid.
- Steen, L. A. (1988)."The science of patterns," *Science*. Vol. 240 (29 April, 1988), 611-616.
- Sundara Row, T. (1966). *Geometric exercises in paper holding*. Dover Publications. New York.
- Vasco, C. E. (2003). "El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías". En: *Tecnologías computacionales en el currículo de Matemáticas* (págs. 68-77). Ministerio de Educación Nacional. Bogotá.
- Vasco, C. E. (1998). "Visión de conjunto de la pedagogía de las matemáticas como disciplina en formación". En: *Revista Matemática–Enseñanza Universitaria*. Vol. 7. No. 1, 75-88.
- Vasco, C. E. (1994). *Un nuevo enfoque para la didáctica de las matemáticas* (2a. ed., 2 vols.). Ministerio de Educación Nacional. Bogotá.
- Vasco, C. E.; Bermúdez, A.; Escobedo, H.; Negret, J. C. y León, T. (1999). *El saber tiene sentido. Una propuesta de integración curricular*. CINEP. Bogotá.
- Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad*. Trillas. México, D. F.
- Vergnaud, G. (1993). "La teoría de los campos conceptuales". En: *Lecturas de didáctica de las matemáticas*. Vol. 10. Nos.. 2-3. Traducción de Juan Díaz Godino.

- Vergnaud, G. (1988). “Multiplicative Structures”. En: J. Hiebert & M. Behr (eds.), *Number concepts and operations in the middle grades*. National Council of Teachers of Mathematics. Lawrence Erlbaum Associates. Reston, VA.
- Wiske, M. S. (Comp.). (2003). *La enseñanza para la comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica*. Paidós. Buenos Aires, Barcelona, México.

Créditos de Estándares Básicos de Competencias de Matemáticas

Coordinación académica
Gloria García O., Universidad Pedagógica Nacional

Formulación de los estándares
- Myriam Acevedo M., Universidad Nacional de Colombia
- Silvia Bonilla J., Universidad Externado de Colombia
- Beatriz Espinosa B., Colegio Nacional Magdalena Ortega de Nariño
- Gilberto Obando Z., Universidad de Antioquia
- Pedro Javier Rojas G., Universidad Distrital Francisco José de Caldas
- Ligia Amparo Torres R., Universidad del Valle. Normal Superior Farallones de Cali
- Carlos Alberto Trujillo S., Universidad del Cauca

Participantes en el proceso de validación nacional
- Cecilia Casasbuenas S., consultora Ascofade
- Jorge Castaño, Pontificia Universidad Javeriana - Colegio Champagnat
- Ana Celia Castiblanco P., consultora Ascofade
- Diego Garzón C., Universidad del Valle
- Grupo de Maestros de Antioquia
- Grupo de Maestros del Cadel Suba - Secretaría de Educación Distrital
- Grupo de Maestros del Colegio José Acevedo y Gómez, Medellín.
- Grupo de Maestros de la Normal Superior Farallones de Cali
- Grupo de Maestros del Distrito Capital de Bogotá
- Grupo Educación Matemática, Universidad del Cauca
- Orlando Mesa B., Universidad de Antioquia
- Ivan Obregón Sanín, consultor independiente
- Carlos Eduardo Vasco U., consultor Ascofade

Texto sobre los referentes conceptuales de los estándares (páginas 46 a 79)
- Carlos Eduardo Vasco, consultor Ascofade
- Gloria García O., Universidad Pedagógica Nacional
- Gilberto Obando Z., Universidad de Antioquia

El texto ha sido elaborado con base en un documento preliminar redactado por el grupo que elaboró los estándares y otro que tuvo como autoras a: Cecilia Casasbuenas, consultora Ascofade; Virginia Cifuentes, consultora Ascofade y Beatriz Espinosa B., Colegio Nacional "Magdalena Ortega de Nariño".

Se agradecen los comentarios y aportes a dicho texto de:
- Myriam Acevedo M., Universidad Nacional de Colombia
- Miryam Ochoa, Coordinación General Ascofade, Universidad Externado de Colombia
- Pedro Javier Rojas G., Universidad Distrital "Francisco de Paula Santander"
- Ligia Amparo Torres R., Universidad del Valle
- Carlos Alberto Trujillo S., Universidad del Cauca
- Ángela Duarte P., Subdirección de Estándares y Evaluación, MEN